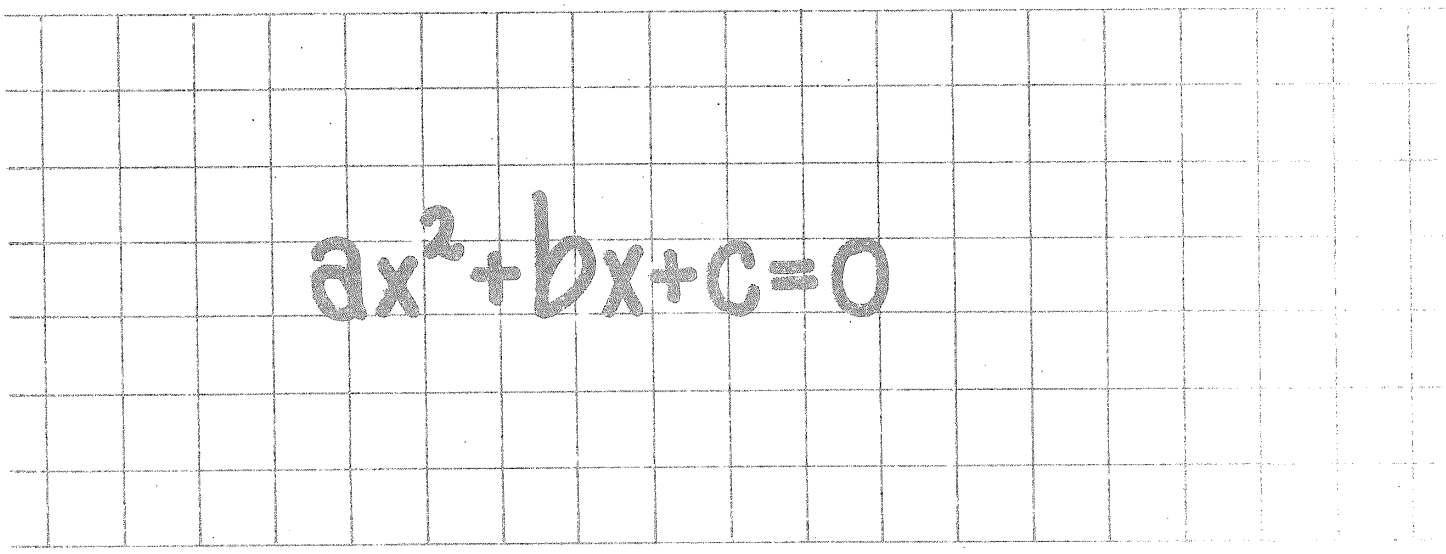
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Obras que integran el bloque 2 *(Álgebra. Modelos)*

1. La ecuación como modelo matemático
2. Ecuaciones de primer grado
3. Sistemas de ecuaciones de primer grado
4. Desigualdades de primer grado
5. ***Ecuaciones de segundo grado***
6. Desigualdades de segundo grado
7. La relación como modelo matemático
8. Funciones
9. Funciones exponenciales
10. Funciones logarítmicas
11. Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas
12. Resolución de problemas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 2

Àlgebra. Modelos

Módulo 5

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, mayo 1985
ISBN 968-24-1519-5

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

5.1 La ecuación de segundo grado como modelo matemático 9

5.2 Ecuaciones completas e incompletas de segundo grado 20

5.3 Ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$ 31

5.4 Ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$ 46

5.5 Ecuaciones completas de segundo grado: factorización en $\mathbb{Z}$ 60

5.6 Ecuaciones completas de segundo grado: factorización en $\mathbb{C}$ 74

5.7 Aplicación de la fórmula cuadrática 90

5.8 El discriminante $b^2 - 4ac$ 97

5.9 La ecuación con radicales como modelo matemático 103

5.10 Conjunto solución de ecuaciones con radicales 111

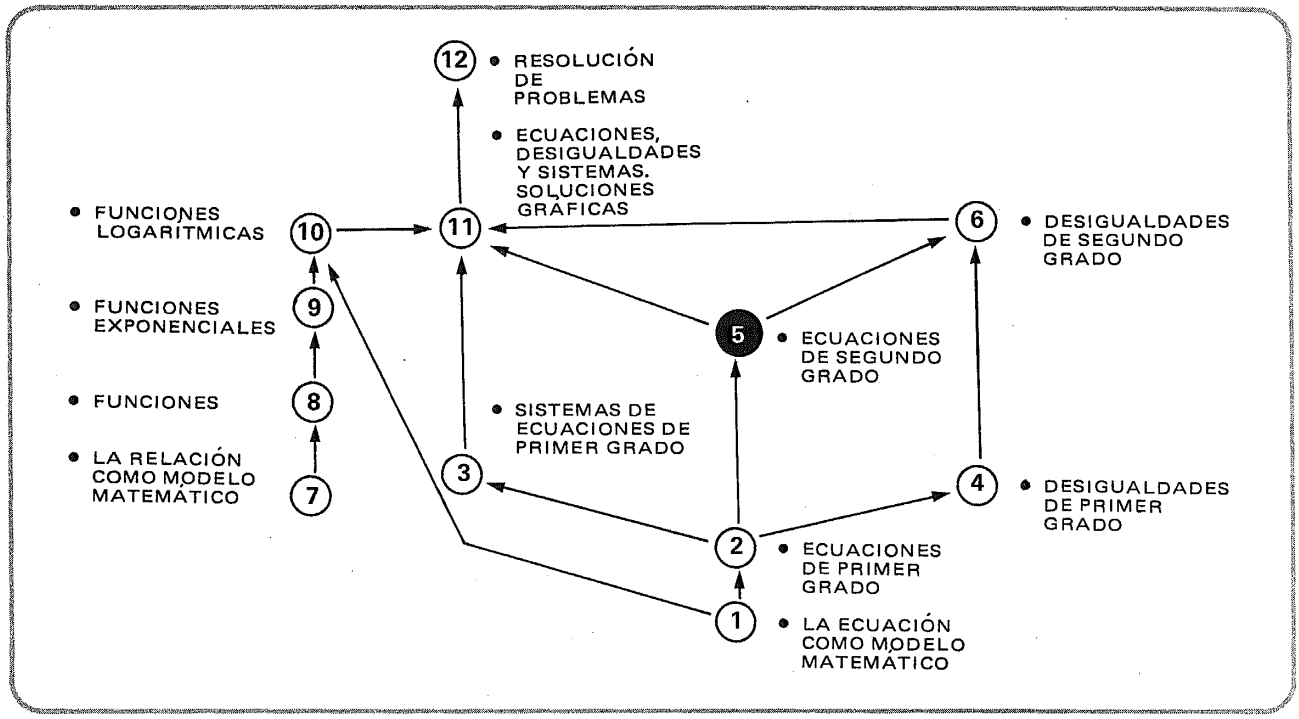
OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 2. Álgebra. Modelos

Objetivos: establecer, resolver y aplicar a situaciones reales las siguientes clases de modelos matemáticos:

– ecuaciones y desigualdades (lineales o cuadráticas)
– sistemas de ecuaciones o desigualdades
– relaciones y funciones

Esquema estructural del bloque 2



Módulo 5. Ecuaciones de segundo grado

Objetivos: resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Prerrequisitos:

	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Resolución de ecuaciones de primer grado	2	2

5.1.

La ecuación de segundo grado como modelo matemático

1

He aquí un problema que
se presenta al

factorizar un trinomio de la forma

$$x^2 + ax + b$$

en que se requiere encontrar

dos números cuya suma sea igual a a,
y cuyo producto sea igual a b.

2

Por ejemplo,
se requiere factorizar

$$x^2 + 12x + 35$$

Recordemos que

$$x^2 + 12x + 35 = (x + \blacksquare)(x + \blacksquare)$$

y necesitamos encontrar

dos

números cuya suma sea 12
y cuyo producto sea 35.

3

$$x^2 + 12x + 35 = (x + \square)(x + \square)$$

En este caso resulta fácil
dar los números

por simple inspección;

tales números son: ⌴ y ⌴

5 7

4

Por lo tanto:

$$x^2 + 12x + 35 = (x + 5)(x + 7)$$

5

No obstante, en ciertos casos

no es nada fácil

determinar tal par de números;
es más,

no siempre

esos números

son enteros.

6

Por ejemplo,
se requiere factorizar

$$x^2 + 6x + 13$$

sabiendo que

$$x^2 + 6x + 13 = (x + \boxed{?}\,)\,(x + \boxed{?}\,)$$

7

Intentemos encontrar

por simple inspección dos números cuya suma sea igual a 6 y cuyo producto sea igual a 13.

8

Decididos a manejar
la situación

matemáticamente,

intentaremos construir un

modelo

que nos permita
encontrar los
números buscados.

9

Se requiere encontrar

dos números cuya suma sea igual a 6 y cuyo producto sea igua a 13.

sean **n** y **m** tales números; entonces, podemos escribir:

$$n + m = 6$$
$$nm = 13$$

10

$$n + m = 6 \quad ①$$
$$nm = 13 \quad ②$$

Reconocemos este modelo como un

sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

11

$$n + m = 6 \quad ①$$
$$nm = 13 \quad ②$$

Resolvamos este sistema utilizando el

método de sustitución.

Despejemos m de la ecuación ②:

$$m = \frac{13}{n}$$

12

$$n + m = 6 \quad ①$$
$$nm = 13 \quad ②$$

Sustituyamos la expresión equivalente a m en la ecuación ①:

$$n + \frac{13}{n} = 6$$

13

$$n + m = 6 \quad ①$$
$$nm = 13 \quad ②$$

Obtenemos una ecuación con una sola incógnita:

$$n + \frac{13}{n} = 6$$

Intentemos resolver esta ecuación, **transformándola** en una ecuación polinomia equivalente. Empecemos por transformar la expresión racional mixta del primer miembro en una expresión racional común (es decir: de la forma $\frac{a}{b}$):

$$\frac{n^2 + 13}{n} = 6$$

14

$$\frac{n^2 + 13}{n} = 6$$

Transformemos, la ecuación resultante en una ecuación entera (sin denominadores):

$$n^2 + 13 = 6n$$

15

$n^2 + 13 = 6n$

Restando 6n de ambos miembros y ordenando el polinomio resultante, obtenemos:

$n^2 - 6n + 13 = 0$

16

Así, hemos obtenido una

ecuación de segundo grado

con una incógnita, variable o indeterminada.

$$n + m = 6 \quad ①$$
$$nm = 13 \quad ②$$

$$\downarrow$$

$$n^2 - 6n + 13 = 0$$

17

$n^2 - 6n + 13 = 0$

La solución de esta ecuación nos dará los dos números buscados para completar la factorización del trinomio

$x^2 + 6x + 13$

18

Antes de emprender el estudio de los procedimientos para la

solución

de las

ecuaciones de segundo grado

con una incógnita, realizaremos algunos ejercicios de

formación

de ecuaciones de este tipo.

19

Dar la expresión matemática requerida.

El cuadrado de un cierto número sumado con el doble del mismo número es igual a 35:

$x^2 + 2x = 35$

20

El cuadrado de un cierto número, disminuido en la mitad de sí mismo es igual a 33:

Atención.

El cuadrado de un cierto número, disminuido en la mitad de sí mismo:

$$x^2 - \frac{x}{2} = 33$$

El cuadrado de: un cierto número disminuido en la mitad de sí mismo:

$$\left(x - \frac{x}{2}\right)^2 = 33$$

21

El cuadrado del sucesor de un cierto número natural, es igual a nueve veces su antecesor:

$$(x + 1)^2 = 9(x - 1)$$
$$x \in \mathbb{N}$$

22

El cuadrado de: un cierto número entero aumentado en cinco, es igual a cuatro veces el cuadrado del sucesor de dicho número:

$$(x + 5)^2 = 4(x + 1)^2$$
$$x \in \mathbb{Z}$$

2.5.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario

23

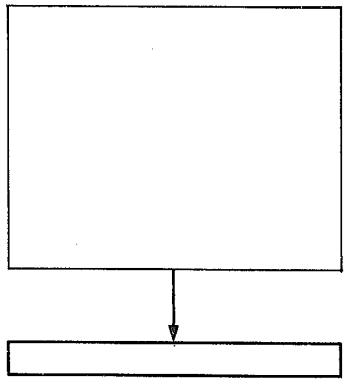
Algunos problemas numéricos
que nos conducen a una

ecuación de segundo grado

con una incógnita,
como modelo matemático.

24

La suma de dos números reales es igual a 13,
su producto es igual a 40:



$$\left.\begin{aligned} x + y &= 13 \\ xy &= 40 \end{aligned}\right\} \; x, y \in \mathbb{R}$$

$$y = \frac{40}{x}$$

$$x + \frac{40}{x} = 13$$

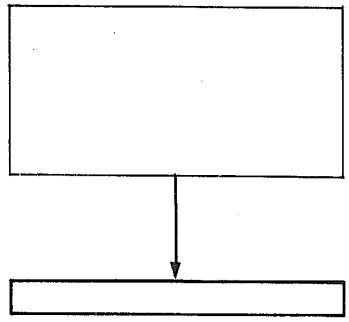
$$\frac{x^2 + 40}{x} = 13$$

$$x^2 + 40 = 13x$$

$$\boxed{x^2 - 13x + 40 = 0} \qquad x \in \mathbb{R}$$

25

Un entero es igual al doble de otro,
el producto de ambos es 32:



$$\left.\begin{aligned} x &= 2y \\ xy &= 32 \end{aligned}\right\} \; x, y \in \mathbb{Z}$$

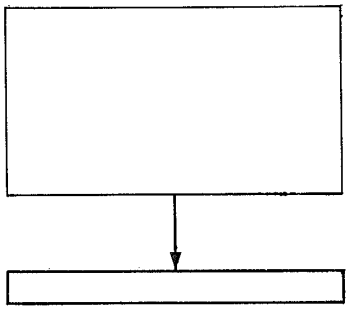
$$(2y)y = 32$$

$$2y^2 = 32$$

$$\boxed{2y^2 - 32 = 0} \qquad y \in \mathbb{Z}$$

26

Un número natural es igual al triple de otro y la suma de los cuadrados de ambos es igual a diez veces el mayor:



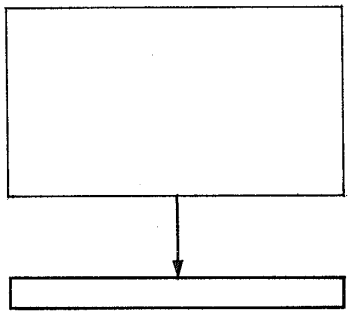
$$\left.\begin{aligned} x &= 3y \\ x^2 + y^2 &= 10x \end{aligned}\right\} x, y \in \mathbb{N}$$

$$(3y)^2 + y^2 = 10(3y)$$
$$9y^2 + y^2 = 30y$$
$$10y^2 = 30y$$
$$10y^2 - 30y = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} y^2 - 3y &= 0 \\ y &\in \mathbb{N} \end{aligned}}$$

27

Un número real más su inverso multiplicativo es igual a 41/20



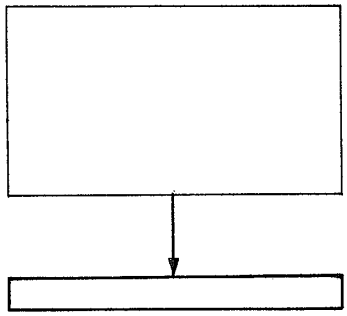
$$\left.\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= \frac{41}{20} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &\in \mathbb{R} \\ x &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{41}{20}$$
$$20(x^2 + 1) = 41x$$
$$20x^2 + 20 = 41x$$

$$\boxed{\begin{aligned} 20x^2 - 41x + 20 &= 0 \\ x &\in \mathbb{R} \\ x &\neq 0 \end{aligned}}$$

28

Un cierto número natural aumentado en la mitad de sí mismo es igual a 150 dividido entre dicho número:



$$\left.\begin{aligned} x + \frac{x}{2} &= \frac{150}{x} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &\in \mathbb{N} \\ x &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{2x + x}{2} = \frac{150}{x}$$
$$\frac{3x}{2} = \frac{150}{x}$$
$$3x^2 = 300$$
$$3x^2 - 300 = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} x^2 - 100 &= 0 \\ x &\in \mathbb{N} \\ x &\neq 0 \end{aligned}}$$

2.5.1.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.5.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* una ecuación de segundo grado con una incógnita como el modelo matemático de una situación real;
- *formar*, a partir de un enunciado dado, una ecuación de segundo grado con una incógnita.

5.2

Ecuaciones completas o incompletas de segundo grado

29

$5x + 4 = 10$

Ésta es una ecuación de

primer grado;

todos los exponentes de la indeterminada son naturales, y el mayor exponente de la indeterminada es 1.

30

$10x^2 - 5x + 8 = 0$

Ésta es una ecuación de [_____] grado.

segundo

31

$$10x^2 - 5x + 8 = 0$$

es una ecuación **completa;**
contiene términos de **segundo grado,**
de **primer grado** y **de grado cero.**

32

Podemos escribir la ecuación del
cuadro anterior así:

$$10x^2 - 5x^1 + 8x^0 = 0$$

Si falta alguno de estos términos, decimos
que la ecuación es

incompleta.

33

$$5x^2 + 1 = 0$$

¿Es ésta una ecuación
completa de segundo grado?

Sí/No

No

34

En la ecuación

$5x^2 + 1 = 0$

Falta el término de [_____] grado para que sea una ecuación completa de segundo grado.

primer

35

$7x^2 - x = 0$

¿Es ésta una ecuación **completa** de segundo grado?

Sí/No

No

36

En la ecuación

$7x^2 - x = 0$

Falta el término de [_____] grado para que sea una ecuación completa de segundo grado.

cero

37

Al término de

grado cero

también le hemos llamado

término [_____]

independiente

38

La **forma general de una ecuación de segundo grado** es

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Si $b = 0$, $c \neq 0$ y $a \neq 0$,
se trata de una ecuación [_____]
de segundo grado,
de la forma [_____]

incompleta

$ax^2 + c = 0$

39

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Si $c = 0$, $b \neq 0$ y $a \neq 0$,

se trata de una ecuación [_____]

de la forma [_____]

incompleta de segundo grado

$ax^2 + bx = 0$

40

$ax^2 + bx + c = 0$

Si $c = b = 0$ y $a \neq 0$,

se trata de una ecuación [_____]

de la forma [_____]

incompleta de segundo grado

$ax^2 = 0$

41

$ax^2 + bx + c = 0$

Si $a = 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$,

se trata de una [_____]

ecuación de primer grado de la forma
$bx + c = 0$

42

$ax^2 + bx + c = 0$

Si $a = c = 0$ y $b \neq 0$,

se trata de una [_____]

ecuación de primer grado de la forma
$bx = 0$

43

$ax^2 + bx + c = 0$

Si $a = b = 0$ y $c \neq 0$,

se trata de una [_____]

proposición cerrada falsa de la forma $c = 0$

44

$ax^2 + bx + c = 0$

Si $a = b = c = 0$,

se trata de una [_____]

proposición cerrada verdadera de la forma $0 = 0$

45

$ax^2 + bx + c = 0$

Si $a \neq 0, b \neq 0$ y $c \neq 0$,

se trata de una [_____]

ecuación completa de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

46

$ax^2 + bx + c = 0$

$\rightarrow$ [ ]

condición para que la expresión indicada represente una

ecuación de segundo grado

(completa o incompleta).

$a \neq 0$

47

Enseguida, haremos algunos ejercicios de transformación de una ecuación dada en una ecuación de la forma

$ax^2 + bx + c = 0$

48

- ecuación dada: $\rightarrow$ $2x^2 + 5x = 6x^2 - 4$
- transformaciones: $\rightarrow$ [ ]
- ecuación equivalente de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ $\rightarrow$ [ ]
- la expresión resultante es una $\rightarrow$ [ ]

$2x^2 + 5x - 6x^2 + 4 = 0$

$-4x^2 + 5x + 4 = 0$

o mejor:
(multiplicando ambos miembros por -1)

$4x^2 - 5x - 4 = 0$

ecuación completa de segundo grado

49

- ecuación dada: → $x(x + 5) = 3x - 5$
- transformaciones: →
- ecuación equivalente de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ →
- la expresión resultante es una →

$x^2 + 5x = 3x - 5$
$x^2 + 5x - 3x + 5 = 0$

$x^2 + 2x + 5 = 0$

ecuación completa de segundo grado

50

- ecuación dada: → $5x + \frac{3}{x} = \frac{3}{4}$ $x \neq 0$
- transformaciones: →
- ecuación equivalente de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ →
- la expresión resultante es una →

$\frac{5x^2 + 3}{x} = \frac{3}{4}$
$4(5x^2 + 3) = 3x$
$20x^2 + 12 = 3x$

$20x^2 - 3x + 12 = 0$

ecuación completa de segundo grado

51

- ecuación dada: → $3x(x - 2) = 6x + 3x^2 - 12x$
- transformaciones: →
- ecuación equivalente de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ →
- la expresión resultante es una →

$3x^2 - 6x = 6x + 3x^2 - 12x$
$3x^2 - 6x - 6x - 3x^2 + 12x = 0$

$0 = 0$

proposición cerrada verdadera

52

- ecuación dada: → $3x + 2x^2 + 5 = 12 + x - 7$
- transformaciones: →
- ecuación equivalente de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ →
- la expresión resultante es una →

$3x + 2x^2 + 5 - 12 - x + 7 = 0$

$2x^2 + 2x = 0$

$x^2 + x = 0$

ecuación incompleta de segundo grado con $c = 0$

53

- ecuación dada: → $(x + 3)^2 = 6x + 5$
- transformaciones: →
- ecuación equivalente de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ →
- la expresión resultante es una →

$x^2 + 6x + 9 = 6x + 5$

$x^2 + 6x + 9 - 6x - 5 = 0$

$x^2 + 4 = 0$

ecuación incompleta de segundo grado con $b = 0$

54

- ecuación dada: → $3x^2 + 5x - 1 = x^2 + 5 + 2x^2$
- transformaciones: →
- ecuación equivalente de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ →
- la expresión resultante es una →

$3x^2 + 5x - 1 - x^2 - 5 - 2x^2 = 0$

$5x - 6 = 0$

ecuación de primer grado

55

- ecuación dada: → $3x^2 - 15x + 8 = 3x(x - 5)$
- transformaciones: →
- ecuación equivalente de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ →
- la expresión resultante es una →

$3x^2 - 15x + 8 = 3x^2 - 15x$

$3x^2 - 15x + 8 - 3x^2 + 15x = 0$

8 = 0

proposición cerrada falsa

56

- ecuación dada: → $(x + 3)^2 = 15$
- transformaciones: →
- ecuación equivalente de la forma $ax^2 + bx + c = 0$
- la expresión resultante es una →

$x^2 + 6x + 9 = 15$

$x^2 + 6x + 9 - 15 = 0$

$x^2 + 6x - 6 = 0$

ecuación completa de segundo grado

2.5.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.5.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *identificar* las ecuaciones de segundo grado, de un conjunto dado de expresiones algebraicas;

- *efectuar* las operaciones necesarias para transformar una ecuación dada en otra equivalente de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, indicando si la expresión resultante es o no es una ecuación de segundo grado, y en caso de serlo, si es completa o incompleta.

5.3

Ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$

57

Intentemos resolver la ecuación

$$x^2 = 4$$
$$x \in \mathbb{R}$$

¿Qué sustituto para x satisface esta ecuación?

$x =$ [ ]

Porque [ ]

- 2
- $(2)^2 = 4$
  $4 = 4$ ◀ PCV

y también

-2

$(-2)^2 = 4$
$4 = 4$ ◀ PCV

58

$$x^2 = 4 \quad x \in \mathbb{R}$$

Podemos escribir la solución así:

$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}} \quad 2, -2 \in \mathbb{R}$$

59

Recordemos que:

- $\sqrt{4}$ representa: la raíz cuadrada **positiva** de 4, o sea 2
- $-\sqrt{4}$ representa: la raíz cuadrada **negativa** de 4, o sea -2
- $\pm\sqrt{4}$ representa: las dos raíces cuadradas de 4, o sea ± 2

60

En forma similar resolvamos las siguientes ecuaciones:

$x^2 = 9 \qquad x \in \mathbb{R}$

$x = \square$

$x = \square$

$x_1 = \square$

$x_2 = \square$

$\square$

$\pm\sqrt{9}$

± 3

3

-3

$3, -3 \in \mathbb{R}$

61

$x^2 = \frac{4}{9} \qquad x \in \mathbb{R}$

$x = \square$

$x = \square$

$x_1 = \square$

$x_2 = \square$

$\square$

- $\pm\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$
- $\pm\frac{2}{3}$
- $\frac{2}{3}$
- $-\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$

62

$x^2 = \frac{25}{16}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$x =$ ____

$x =$ ____

$x_1 =$ ____

$x_2 =$ ____ } ____

- $\pm\sqrt{\frac{25}{16}} = \pm\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}$
- $\pm\frac{5}{4}$
- $\frac{5}{4}$
- $-\frac{5}{4}$

} $\frac{5}{4}, -\frac{5}{4} \in \mathbb{R}$

63

$x^2 = 17$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$x =$ ____

$x =$ ____

$x_1 =$ ____

$x_2 =$ ____ } ____

$\pm\sqrt{17}$

$\pm\sqrt{17}$

$\sqrt{17}$

$-\sqrt{17}$ } $\sqrt{17}, -\sqrt{17} \in \mathbb{R}$

64

$x^2 = 12$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$x =$ ____

$x =$ ____

$x_1 =$ ____

$x_2 =$ ____ } ____

$\pm\sqrt{12} = \pm\sqrt{4 \times 3}$

$\pm 2\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}$

$-2\sqrt{3}$ } $2\sqrt{3}, -2\sqrt{3} \in \mathbb{R}$

65

$x^2 = 48$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$x = \square$

$x = \square$

$x_1 = \square$

$x_2 = \square$

$\square$

$\pm\sqrt{48} = \pm\sqrt{16x3}$

$\pm 4\sqrt{3}$

$4\sqrt{3}$

$-4\sqrt{3}$

$4\sqrt{3}, -4\sqrt{3} \in \mathbb{R}$

66

$x^2 = 48$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$x_1 = 4\sqrt{3}$

$x_2 = -4\sqrt{3}$

comprobación:

- $(4\sqrt{3})^2 = 48$
  $4^2(\sqrt{3})^2 = 48$
  $16X3 = 48$
  $48 = 48$ ◀ PCV

- $(-4\sqrt{3})^2 = 48$
  $(-4)^2\ (\sqrt{3})^2 = 48$
  $16 \times 3 = 48$
  $48 = 48$ ◀ PCV

67

$x^2 = 48$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$x_1 = 4\sqrt{3}$

$x_2 = -4\sqrt{3}$

Conjunto solución:

$S = \square = \square$

por comprensión por extensión

- $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 48\}$
- $\{4\sqrt{3}, -4\sqrt{3}\}$

68

Estudiemos con atención el procedimiento completo.

$x^2 = 48$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$x = \pm\sqrt{48}$

$x = \pm\sqrt{16x3}$

$x = \pm 4\sqrt{3}$

$x_1 = 4\sqrt{3}$

$x_2 = -4\sqrt{3}$

$4\sqrt{3}, -4\sqrt{3} \in \mathbb{R}$

Comprobación:

$(4\sqrt{3})^2 = 48 \longrightarrow 48 = 48$ ☑◀PCV

$(-4\sqrt{3})^2 = 48 \longrightarrow 48 = 48$ ☑◀PCV

Conjunto solución:

$S = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 48\} = \{4\sqrt{3}, -4\sqrt{3}\}$

69

Resolver:

$x^2 = 5$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$x_1 =$ ____

$x_2 =$ ____

____

Comprobación:

Conjunto solución:

____

- $\sqrt{5}$
- $-\sqrt{5}$

$\sqrt{5}, -\sqrt{5} \in \mathbb{R}$

- $(\sqrt{5})^2 = 5$

  $5 = 5$ ☑◀PCV

  $(-\sqrt{5})^2 = 5$

  $5 = 5$ ☑◀PCV

- $S = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 5\}$

  $= \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

70

Resolver:

$x^2 = -4 \qquad x \in \mathbb{R}$

$x_1 =$ ⌊ ⌋

$x_2 =$ ⌊ ⌋

Comprobación:

Conjunto solución:

Atención

$\left.\begin{matrix}\sqrt{-4}\\ -\sqrt{-4}\end{matrix}\right\} \sqrt{-4}, -\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

$S = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = -4\}$
$= \phi$

71

$x^2 = -4 \qquad x \in \mathbb{R}$

No existe ningún número real que satisfaga esta ecuación

$(?)^2 = -4$

Por ejemplo:

$(2)^2 = 2 \cdot 2 = 4$

$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$

72

Si ampliamos el dominio a $\mathbb{C}$ (conjunto de los números complejos) la ecuación

$x^2 = -4$

sí tiene solución; observemos:

$x = \pm\sqrt{-4}$

$x = \pm\sqrt{(-1) \cdot 4} = \pm\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}$

$x = \pm 2\sqrt{-1}$

Y puesto que hemos definido: $\sqrt{-1} = i$

$x = \pm 2i$

73

$$x^2 = -4 \qquad x \in \mathbb{C}$$
$$x = \pm 2i$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 2i \\ x_2 = -2i \end{array}\right\} \; 2i, -2i \in \mathbb{C}$$

Comprobación:

$$(2i)^2 = -4 \qquad (-2i)^2 = -4$$
$$2^2 \cdot i^2 = -4 \qquad (-2)^2 \cdot i^2 = -4$$
$$4 \cdot i^2 = -4 \qquad 4 \cdot i^2 = -4$$
$$-4 = -4 \blacktriangleleft \text{PCV} \qquad -4 = -4 \blacktriangleleft \text{PCV}$$

si $\; i = \sqrt{-1}$

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

Conjunto solución:

$$S = \{ x \mid x \in \mathbb{C} \wedge x^2 = -4 \} = \{ 2i, -2i \}$$

74

Resolvamos, de manera similar:

$$x^2 = -9 \qquad x \in \mathbb{C}$$
$$x_1 = \square$$
$$x_2 = \square \qquad \square$$

Comprobación:

Conjunto solución:

Respuesta en el cuadro siguiente

$$x^2 = -9$$
$$x = \pm\sqrt{-9}$$
$$x = \pm\sqrt{(-1) \cdot 9}$$
$$x = \pm 3\sqrt{-1}$$
$$x = \pm 3i$$

- $x_1 = 3i$
- $x_2 = -3i$

$\} \; 3i, -3i \in \mathbb{C}$

Comprobación:

$$(3i)^2 = -9 \qquad (-3i)^2 = -9$$
$$3^2 i^2 = -9 \qquad (-3)^2 i^2 = -9$$
$$9i^2 = -9 \qquad 9i^2 = -9$$
$$-9 = -9 \blacktriangleleft \text{PCV} \qquad -9 = -9 \blacktriangleleft \text{PCV}$$

Conjunto solución:

- $S = \{ x \mid x \in \mathbb{C} \wedge x^2 = -9 \} = \{ 3i, -3i \}$

75

$x^2 = -\frac{4}{9}$ $\quad x \in \mathbb{C}$

$x_1 =$ ____

$x_2 =$ ____

____

Comprobación:

Conjunto solución:

Respuesta en el cuadro siguiente

- $x_1 = \frac{2}{3}\,i$
  $x_2 = -\frac{2}{3}\,i$
  $\Big\}\ \frac{2}{3}\,i, -\frac{2}{3}\,i \in \mathbb{C}$
- $\left(\frac{2}{3}\,i\right)^2 = -\frac{4}{9}$ $\qquad$ $\left(-\frac{2}{3}\,i\right)^2 = -\frac{4}{9}$

  $\left(\frac{2}{3}\right)^2 i^2 = -\frac{4}{9}$ $\qquad$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 i^2 = -\frac{4}{9}$

  $\frac{4}{9}\,i^2 = -\frac{4}{9}$ $\qquad$ $\frac{4}{9}\,i^2 = -\frac{4}{9}$

  $-\frac{4}{9} = -\frac{4}{9}$ ◀ PCV $\qquad$ $-\frac{4}{9} = -\frac{4}{9}$ ◀ PCV
- $S = \{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge x^2 = -4/9\} = \left\{\frac{2}{3}\,i, -\frac{2}{3}\,i\right\}$

76

$x^2 = -17$ $\quad x \in \mathbb{C}$

$x_1 =$ ____

$x_2 =$ ____

____

Comprobación:

Conjunto solución:

Respuesta en el cuadro siguiente

- $\left.\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{17}\,i \\ x_2 = -\sqrt{17}\,i \end{array}\right\} \in \mathbb{C}$

- $(\sqrt{17}i)^2 = -17 \qquad (-\sqrt{17}i)^2 = -17$

  $(\sqrt{17})^2 i^2 = -17 \qquad (-\sqrt{17})^2 i^2 = -17$

  $17i^2 = -17 \qquad 17i^2 = -17$

  $-17 = -17$ ◀ PCV $\qquad -17 = -17$ ◀ PCV

- $S = \{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge x^2 = -17\} = \{\sqrt{17}\,i, -\sqrt{17}\,i\}$

77

$x^2 = -50 \qquad x \in \mathbb{C}$

$x_1 =$ ____

$x_2 =$ ____ } ____

Comprobación:

Conjunto solución:

Respuesta en el cuadro siguiente

- $\left.\begin{array}{l} x_1 = 5\sqrt{2}\,i \\ x_2 = -5\sqrt{2}\,i \end{array}\right\} \in \mathbb{C}$

- $(5\sqrt{2}i) = -50 \qquad (-5\sqrt{2}i)^2 = -50$

  $5^2(\sqrt{2})^2 i^2 = -50 \qquad (-5)^2 (\sqrt{2})^2 i^2 = -50$

  $25 \cdot 2i^2 = -50 \qquad 25 \cdot 2i^2 = -50$

  $50i^2 = -50 \qquad 50i^2 = -50$

  $-50 = -50$ ◀PCV $\qquad -50 = -50$ ◀PCV

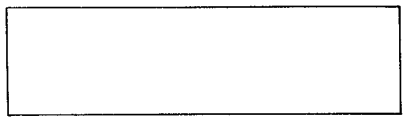
- $S = \{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge x^2 = -50\} = \{5\sqrt{2}i, -5\sqrt{2}i\}$

78

$x^2 = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

$x_1 =$ ⌊___⌋ }
$x_2 =$ ⌊___⌋ } ⌊___⌋

Comprobación:



Conjunto solución.

⌊_____⌋

$x_1 = 0$ }
$x_2 = 0$ } $0 \in \mathbb{C}$

$(0)^2 = 0$

$0 = 0$ ◀PCV

$S = \{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge x^2 = 0\}$
$= \{0\}$

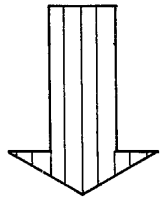
2.5.3.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario

79

Se requiere resolver $\boxed{x^2 - 16 = 0}$ $\quad x \in \mathbb{C}$

Para ello
es necesario
transformar
la ecuación dada
en una ecuación
equivalente de
la forma $x^2 = a$
y resolver
esta ecuación
mediante el
procedimiento
hasta aquí aplicado.



- $x^2 =$ ⌊___⌋
- $x_1 =$ ⌊___⌋ }
  $x_2 =$ ⌊___⌋ } ⌊___⌋
- Comprobación
- Conjunto solución

Respuesta
en el
cuadro siguiente

- $x^2 = 16$
  $x = \pm 4$
- $\left.\begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{matrix}\right\}$ $4, -4 \in \mathbb{C}$
- $(4)^2 - 16 = 0$ $\qquad$ $(-4)^2 - 16 = 0$
  $16 - 16 = 0$ $\qquad$ $16 - 16 = 0$
  $0 = 0$ ◄ PCV $\qquad$ $0 = 0$ ◄ PCV
- $S = \{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge x^2 - 16 = 0\} = \{4, -4\}$

80

Ecuación dada: $\boxed{3x^2 - 48 = 0}$ $\quad x \in \mathbb{C}$

Transformaciones: $\square$

Ecuación equivalente: $x^2 = \square$

$\left.\begin{matrix} x_1 = \square \\ x_2 = \square \end{matrix}\right\}$ $\square$

Comprobación: $\square$

Conjunto solución: $\square$

Respuesta en el cuadro siguiente

- $3x^2 = 48$
  $x^2 = 48/3$
- $\boxed{x^2 = 16}$
  $x = \pm 4$
- $\left.\begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{matrix}\right\}$ $\in \mathbb{C}$
- $3(4)^2 - 48 = 0$ $\qquad$ $3(-4)^2 - 48 = 0$
  $3 \times 16 - 48 = 0$ $\qquad$ $3 \times 16 - 48 = 0$
  $48 - 48 = 0$ $\qquad$ $48 - 48 = 0$
  $0 = 0$ ◄ PCV $\qquad$ $0 = 0$ ◄ PCV
- $S = \{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge 3x^2 - 48 = 0\} = \{4, -4\}$

81

Ecuación dada: $5x^2 - 9 = 46$ $x \in \mathbb{C}$

Transformaciones:

Ecuación equivalente: $x^2 = \square$

$x_1 = \square$
$x_2 = \square$ } $\square$

Comprobación:

Conjunto solución. $\square$

Respuesta en el cuadro siguiente

- $5x^2 = 46 + 9 = 55$
  $x^2 = 55/5$
- $\boxed{x^2 = 11}$
  $x = \pm\sqrt{11}$
- $x_1 = \sqrt{11}$
  $x_2 = -\sqrt{11}$ } $\in \mathbb{C}$
- $5(\sqrt{11})^2 - 9 = 46$
  $5 \cdot 11 - 9 = 46$
  $55 - 9 = 46$
  $46 = 46$ ◀ PCV

  $5(-\sqrt{11})^2 - 9 = 46$
  $5 \cdot 11 - 9 = 46$
  $55 - 9 = 46$
  $46 = 46$ ◀ PCV
- $S = \{ x | x \in \mathbb{C} \wedge 5x^2 - 9 = 46 \} = \{\sqrt{11}, -\sqrt{11}\}$

82

Ecuación dada: $7x^2 + 28 = 0$ $x \in \mathbb{C}$

Transformaciones:

Ecuación equivalente: $x^2 = \square$

$x_1 = \square$
$x_2 = \square$ } $\square$

Comprobación:

Conjunto solución: $\square$

Respuesta en el cuadro siguiente

- $7x^2 = -28$
  $x^2 = -28/7$
- $\boxed{x^2 = -4}$
- $\left.\begin{array}{l} x_1 = 2i \\ x_2 = -2i \end{array}\right\} \in \mathbb{C}$
- $7(2i)^2 + 28 = 0$
  $7 \cdot 4i^2 + 28 = 0$
  $28i^2 + 28 = 0$
  $-28 + 28 = 0$
  $0 = 0$ ◀ PCV

  $7(-2i)^2 + 28 = 0$
  $7 \cdot 4i^2 + 28 = 0$
  $28i^2 + 28 = 0$
  $-28 + 28 = 0$
  $0 = 0$ ◀ PCV
- $S = \{ x \mid x \in \mathbb{C} \wedge 7x^2 + 28 = 0 \} = \{ 2i, -2i \}$

83

Ecuación dada: $\boxed{2x^2 + 32 = 0}$ $x \in \mathbb{C}$

Transformaciones: ☐

Ecuación equivalente: $x^2 = \square$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = \square \\ x_2 = \square \end{array}\right\}$ ☐

Comprobación: ☐

Conjunto solución: ☐

Respuesta en el cuadro siguiente

- $2x^2 = -32$
  $x^2 = -32/2$
- $\boxed{x^2 = -16}$
  $x = \pm 4i$
- $\left.\begin{array}{l} x_1 = 4i \\ x_2 = -4i \end{array}\right\} \in \mathbb{C}$
- $2(4i)^2 + 32 = 0$
  $2 \cdot 16i^2 + 32 = 0$
  $32i^2 + 32 = 0$
  $-32 + 32 = 0$
  $0 = 0$ ◀ PCV

  $2(-4i)^2 + 32 = 0$
  $2 \cdot 16i^2 + 32 = 0$
  $32i^2 + 32 = 0$
  $-32 + 32 = 0$
  $0 = 0$ ◀ PCV
- $S = \{ x \mid x \in \mathbb{C} \wedge 2x^2 + 32 = 0 \} = \{ 4i, -4i \}$

84

Ecuación dada: $5x^2 + 12 = 3x^2 - 20$ $x \in \mathbb{C}$

Transformaciones:

Ecuación equivalente: $x^2 = \square$

$x_1 = \square$
$x_2 = \square$ } $\square$

Comprobación:

Conjunto solución: $\square$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

- $5x^2 + 12 - 3x^2 + 20 = 0$
  $2x^2 + 32 = 0$
  $2x^2 = -32$
  $x^2 = -32/2$
- $x^2 = -16$
- $x_1 = 4i$
  $x_2 = -4i$ } $\in \mathbb{C}$
- $5(4i)^2 + 12 = 3(4i)^2 - 20$
  $5 \cdot 16i^2 + 12 = 3 \cdot 16i^2 - 20$
  $80i^2 + 12 = 48i^2 - 20$
  $-80 + 12 = -48 - 20$
  $-68 = -68$ ◀ PCV

  $5(-4i)^2 + 12 = 3(-4i)^2 - 20$
  $5 \cdot 16i^2 + 12 = 3 \cdot 16i^2 - 20$
  $80i^2 + 12 = 48i^2 - 20$
  $-80 + 12 = -48 - 20$
  $-68 = -68$ ◀ PCV
- $S = \{ x | x \in \mathbb{C} \wedge 5x^2 + 12 = 3x^2 - 20 \} = \{ 4i, -4i \}$

2.5.3.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.5.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* ecuaciones incompletas de segundo grado, de la forma $ax^2 + c = 0$; comprobar los resultados, y escribir el conjunto solución por comprensión o por extensión.

5.4

Ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$

85

Se requiere resolver la siguiente ecuación:

$$3x^2 + 12x = 0 \qquad x \in \mathbb{C}$$

Pero nos damos cuenta de que
no puede ser resuelta
por el procedimiento estudiado
en el submódulo anterior.

86

$$3x^2 + 12x = 0$$

Para la solución
de una ecuación como ésta,
recurriremos a una

propiedad de las igualdades

que hemos enunciado, pero que
no hemos utilizado hasta ahora.

Ver cuadro siguiente.

87

Si $ab = 0$, **entonces** $a = 0$ **o** $b = 0$ **o** $a = b = 0$

Hemos llamado a esto,

propiedad del producto nulo

que podemos expresar así:

"Si el producto de dos factores es igual a cero, cuando menos uno de los factores debe ser cero".

88

Entonces, para resolver la ecuación

$$3x^2 + 12x = 0$$

lo primero que debemos hacer es

expresar el primer miembro

como un

producto de dos factores.

89

$$3x^2 + 12x = 0$$

Factoricemos pues, el primer miembro:

$$\boxed{\qquad} = 0$$

$3x(x + 4)$

90

Atención.

$3x^2 + 12x = 0$

Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado:

$3x(x + 4) = 0$

Debe verificarse, de acuerdo con la propiedad enunciada

$3x = 0$ o $x + 4 = 0$

91

Estudiar con atención.

$3x^2 + 12x = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: $3x(x + 4) = 0$

Sistema equivalente de dos ecuaciones de primer grado: $3x = 0$ o $x + 4 = 0$

De donde: $x_1 = \square$ $\quad x_2 = \square$

- $x_1 = 0$
- $x_2 = -4$

92

Estudiar con atención el procedimiento completo.

$3x^2 + 12x = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

$3x(x + 4) = 0$

$3x = 0$ $\quad 0 \in \mathbb{C}$ $\quad$ o $\quad x + 4 = 0$ $\quad -4 \in \mathbb{C}$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x_2 = -4$

Conjuntos solución:

$S_1 = \{0\}$ $\qquad$ $S_2 = \{-4\}$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge 3x^2 + 12x = 0\} = \{0, -4\}$

93

Atención.

También podemos representar el conjunto solución en esta forma:

$$S = \{ x \mid x \in \mathbb{C} \wedge \underbrace{(3x = 0 \vee x + 4 = 0)}_{\text{sistema equivalente}} \}$$

sin perder de vista que $\vee$ representa al conectivo de la disyunción inclusiva: a $\vee$ b debe interpretarse como a o b o ambas.

94

Resolver $5x^2 - 15x = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

- Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: $\square$
- Sistema equivalente de dos ecuaciones de primer grado: $\square$ o $\square$
- $x_1 = \square$ $\quad x_2 = \square$
- Conjunto solución: $S = \underbrace{\square}_{\text{Por comprensión}} = \underbrace{\square}_{\text{Por extensión}}$

Ver la respuesta en el cuadro siguiente.

$5x^2 - 15x = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

$5x(x - 3) = 0$

$5x = 0$ o $x - 3 = 0$

$x_1 = 0$ $\quad 0 \in \mathbb{C}$ $\quad x_2 = 3$ $\quad 3 \in \mathbb{C}$

Conjunto solución: $S = \{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge 5x^2 - 15x = 0\} = \{0, 3\}$

Por comprensión $\quad$ Por extensión

95

Resolver $x^2 - 4x = 0$ $x \in \mathbb{C}$

$\square$

$\square$ o $\square$

$x_1 = \square$ $x_2 = \square$

Conjunto solución: $S = \square = \square$

Por comprensión Por extensión

Respuesta en el cuadro siguiente

$x^2 - 4x = 0$ $x \in \mathbb{C}$

$x(x - 4) = 0$

$x = 0$ o $x - 4 = 0$

$x_1 = 0$ $x_2 = 4$

Conjunto solución: $S = \{ x \mid x \in \mathbb{C} \wedge x^2 - 4x = 0 \} = \{ 0, 4 \}$

Por comprensión Por extensión

96

Observemos que el sistema

$$x = 0 \vee x - 4 = 0$$

y la ecuación

$$x^2 - 4x = 0$$

son **equivalentes** (tienen el mismo conjunto solución).

Ver cuadro siguiente

97

$$S = \{0,4\}$$

es el conjunto solución del sistema

$$x = 0 \vee x - 4 = 0$$

- 0 satisface a la primera ecuación y por lo tanto, al sistema.
- 4 satisface a la segunda ecuación, y por lo tanto, al sistema.

y también el de la ecuación

$$x^2 - 4x = 0$$

- 0 y 4 satisfacen a la ecuación, como puede ser fácilmente comprobado.

98

Resolver $6x^2 - x = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

$\square$

$\square$ o $\square$

$x_1 = \square$ $\qquad$ $x_2 = \square$

Conjunto solución: $S = \square = \square$

Por comprensión $\qquad$ Por extensión

Respuesta en el cuadro siguiente

$6x^2 - x = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

$x(6x - 1) = 0$

$x = 0$ o $6x - 1 = 0$

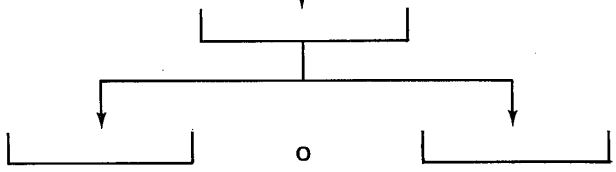
$x_1 = 0$ $\quad 0 \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $x_2 = 1/6$ $\quad 1/6 \in \mathbb{C}$

Conjunto solución: $S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge 6x^2 - x = 0\} = \{0, 1/6\}$

Por comprensión $\qquad$ Por extensión

99

Resolver $4x^2 + 8x = 0$ $x \in \mathbb{C}$



o

$x_1 =$ ____ $x_2 =$ ____

Conjunto solución: $S =$ ____ $=$ ____

Por comprensión Por extensión

Respuesta en el cuadro siguiente

$4x^2 + 8x = 0$ $x \in \mathbb{C}$

$4x(x + 2) = 0$

$4x = 0$ o $x + 2 = 0$

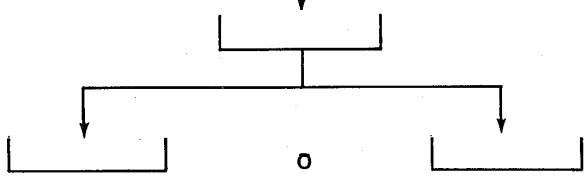
$x_1 = 0$ $x \in \mathbb{C}$ $x_2 = -2 \in \mathbb{C}$

Conjunto solución: $S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge 4x^2 + 8x = 0\} = \{0, -2\}$

Por comprensión Por extensión

100

Resolver $x^2 + x = 0$ $x \in \mathbb{C}$



o

$x_1 =$ ____ $x_2 =$ ____

Conjunto solución: $S =$ ____ $=$ ____

Por comprensión Por extensión

Respuesta en el cuadro siguiente

$x^2 + x = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

$x(x + 1) = 0$

$x = 0$ o $x + 1 = 0$

$x_1 = 0 \quad 0 \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $x_2 = -1 \quad -1 \in \mathbb{C}$

Conjunto solución: $S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge x^2 + x = 0\} = \{0, -1\}$

Por comprensión $\qquad$ Por extensión

101

Resolver $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

o

$x_1 =$ $\qquad$ $x_2 =$

Conjunto solución: $S =$ $\qquad = $

Por comprensión $\qquad$ Por extensión

Respuesta en el cuadro siguiente

$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

Una de tantas descomposiciones posibles para el primer miembro: $\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 0$ o también, por ejemplo: $\frac{1}{4}x(x + 2) = 0$

$\frac{1}{2}x = 0$ o $\frac{1}{2}x + 1 = 0$

$x_1 = 0 \quad 0 \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $x_2 = -2 \quad -2 \in \mathbb{C}$

Conjunto solución: $S = \left\{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 0\right\} = \{0, -2\}$

102

Resolver $\boxed{\frac{3x^2}{8} - \frac{5x}{7} = 0}$ $x \in \mathbb{C}$

$\square$

$\square$ o $\square$

$x_1 = \square$ $x_2 = \square$

Conjunto solución: $S = \square = \square$

Respuesta en el cuadro siguiente

Una de tantas descomposiciones posibles:

$\boxed{\frac{3x^2}{8} - \frac{5x}{7} = 0}$ $x \in \mathbb{C}$

$\boxed{\frac{3}{8}x\left(x - \frac{40}{21}\right) = 0}$

$\boxed{\frac{3}{8}x = 0}$ o $\boxed{x - \frac{40}{21} = 0}$

$x_1 = 0$ $0 \in \mathbb{C}$ $x_2 = \frac{40}{21}$ $\frac{40}{21} \in \mathbb{C}$

Conjunto solución: $\boxed{S = \left\{x | x \in \mathbb{C} \wedge \frac{3x^2}{8} - \frac{5x}{7} = 0\right\} = \{0, 40/21\}}$

103

$\boxed{0.78x^2 + 1.5x = 0}$ $x \in \mathbb{C}$

Factorizar utilizando aproximaciones a centésimas:

$\square$

$\square$ o $\square$

$x_1 = \square$ $x_2 = \square$

Conjunto solución: $S = \square = \square$

Respuesta en el cuadro siguiente

Una de tantas descomposiciones posibles:

$0.78x^2 + 1.5x = 0 \quad x \in \mathbb{C}$

$0.78x(x + 1.92) = 0$

$0.78x = 0$ o $x + 1.92 = 0$

$x_1 = 0 \quad 0 \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $x_2 \doteq -1.92 \quad -1.92 \in \mathbb{C}$

Conjunto solución: $S = \{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge 0.78x^2 + 1.5x = 0\} = \{0, -1.92\}$

104

Resolver $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x = 0 \quad x \in \mathbb{C}$

o

$x_1 =$ $\qquad$ $x_2 =$

Conjunto solución: $S =$ $\qquad$ $=$

Respuesta en el cuadro siguiente

Una de tantas descomposiciones posibles:

$\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x = 0 \quad x \in \mathbb{C}$

$\sqrt{3}x(x + \sqrt{2/3}) = 0$

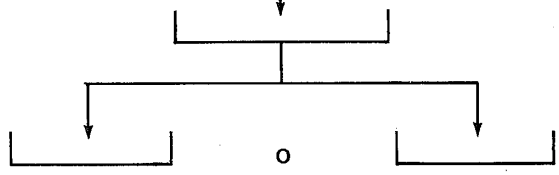
$\sqrt{3}x = 0$ o $x + \sqrt{2/3} = 0$

$x_1 = 0 \quad 0 \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad -\sqrt{\frac{2}{3}} \in \mathbb{C}$

Conjunto solución: $S = \left\{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge \sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x = 0\right\} = \left\{0, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$

105

Resolver $3ix^2 - 2ix = 0$ $x \in \mathbb{C}$



o

$x_1 =$ ____ $x_2 =$ ____

Conjunto solución: $S =$ ____ $=$ ____

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$3ix^2 - 2ix = 0$ $x \in \mathbb{C}$

$3ix\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0$

$3ix = 0$ o $x - \frac{2}{3} = 0$

$x_1 = 0$ $0 \in \mathbb{C}$ $x_2 = \frac{2}{3}$ $\frac{2}{3} \in \mathbb{C}$

Conjunto solución: $S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge 3ix^2 - 2ix = 0\}$ $\{0, 2/3\}$

2.5.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

106

Resolver $3x^2 - 5x = 3x - x^2$ $x \in \mathbb{C}$

1. Ecuación equivalente de la forma $ax^2 + bx = 0$: ⌊ ⌋
2. Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: ⌊ ⌋
3. Sistema equivalente de dos ecuaciones de primer grado: ⌊ ⌋ o ⌊ ⌋

   $x_1 =$ ⌊ ⌋ $x_2 =$ ⌊ ⌋
4. Conjunto solución: $S =$ ⌊ ⌋ $=$ ⌊ ⌋

Ver respuesta en el siguiente cuadro.

Estudiar con atención:

$3x^2 - 5x = 3x - x^2$ $x \in \mathbb{C}$

1. Ecuación equivalente de la forma $ax^2 + bx = 0$: $x^2 - 2x = 0$
2. Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: $x(x - 2) = 0$
3. Sistema equivalente de dos ecuaciones de primer grado: $x = 0$ o $x - 2 = 0$

   $x_1 = 0$ $0 \in \mathbb{C}$ $x_2 = 2$ $2 \in \mathbb{C}$
4. Conjunto solución: $S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge 3x^2 - 5x = 3x - x^2\} = \{0, 2\}$

107

Resolver $5x^2 + 6x = x$ $x \in \mathbb{C}$

1. Ecuación equivalente de la forma $ax^2 + bx = 0$: ⌊ ⌋
2. Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: ⌊ ⌋
3. Sistema equivalente de dos ecuaciones de primer grado: ⌊ ⌋ o ⌊ ⌋

   $x_1 =$ ⌊ ⌋ $x_2 =$ ⌊ ⌋
4. Conjunto solución: $S =$ ⌊ ⌋ $=$ ⌊ ⌋

Ver respuesta en el cuadro siguiente.

1. Ecuación equivalente de la forma $ax^2 + bx = 0$:

2. Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado:

3. Sistema equivalente de dos ecuaciones de primer grado:

$$5x^2 + 6x = x \qquad x \in \mathbb{C}$$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x + 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$

$x_1 = 0$ o $\in \mathbb{C}$ $\qquad$ $x_2 = -1$ $-1 \in \mathbb{C}$

4. Conjunto solución: $S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge 5x^2 + 6x = x\} = \{0, -1\}$

108

$5x^2 + 6x = x \qquad x \in \mathbb{C}$

$x_1 = 0$

$x_2 = -1$

Comprobación:

- $5(0)^2 + 6(0) = 0$
  $0 + 0 = 0$
  $0 = 0$
  ▲
  PCV

- $5(-1)^2 + 6(-1) = -1$
  $5 \cdot 1 - 6 = -1$
  $5 - 6 = -1$
  $-1 = -1$
  ▲
  PCV

109

Resolver:

$3x(5x + 3) - x = 6x \qquad x \in \mathbb{C}$

$x_1 =$ 0

$x_2 =$ −2/15

Conjunto solución:

$S =$ $\{x | x \in \mathbb{C} \wedge 3x(5x + 3) - x = 6x\}$ $= \{0, -2/15\}$

2.5.4.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.5.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* ecuaciones incompletas de segundo grado, de la forma $ax^2 + bx = 0$; comprobar los resultados y escribir el conjunto solución por comprensión o por extensión.

5.5

Ecuaciones completas de segundo grado: factorización en $\mathbb{Z}$

110

Se requiere resolver
la

ecuación completa de segundo grado

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$x \in \mathbb{C}$$

111

Siempre que sea posible

factorizar el primer miembro de una ecuación,

podremos seguir aplicando la

propiedad del producto nulo.

112

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Intentemos **factorizar** el primer miembro, recordando que este trinomio cuadrático es igual al producto de dos binomios:

$$\boxed{(x + m)(x + n)}$$

en que **m** y **n** son dos números cuya suma es 5, y cuyo producto es 6.

113

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \qquad x \in \mathbb{C}$$

$$(x + \square)(x + \square) = 0$$

2 3

en cualquier orden

114

Apliquemos la propiedad del producto nulo para producir un sistema equivalente de dos ecuaciones de primer grado

$$\boxed{x^2 + 5x + 6 = 0} \qquad x \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{(x + 2)(x + 3) = 0}$$

$$\square \quad \text{o} \quad \square$$

Respuesta en el cuadro siguiente

115

$x^2 + 5x + 6 = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

$(x + 2)(x + 3) = 0$

$x + 2 = 0$ o $x + 3 = 0$

$x_1 =$ ⌊___⌋ $\qquad x_2 =$ ⌊___⌋

Respuesta en el cuadro siguiente

116

$x^2 + 5x + 6 = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

$(x + 2)(x + 3) = 0$

$x + 2 = 0$ o $x + 3 = 0$

$x_1 = -2 \quad -2 \in \mathbb{C}$ $\qquad x_2 = -3 \quad -3 \in \mathbb{C}$

Comprobación:

Respuesta en el cuadro siguiente

117

$x^2 + 5x + 6 = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

$(x + 2)(x + 3) = 0$

$x + 2 = 0$ o $x + 3 = 0$

$x_1 = -2 \quad -2 \in \mathbb{C}$ $\qquad x_2 = -3 \quad -3 \in \mathbb{C}$

Comprobación:

$(-2)^2 + 5(-2) + 6 = 0$ $\qquad (-3)^2 + 5(-3) + 6 = 0$

$4 - 10 + 6 = 0$ $\qquad 9 - 15 + 6 = 0$

$0 = 0$ $\qquad 0 = 0$

PCV $\qquad$ PCV

Conjunto solución:

$S =$ ⌊___⌋

Respuesta en el cuadro siguiente

Estudiar con atención el procedimiento completo.

$x^2 + 5x + 6 = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

$(x + 2)(x + 3) = 0$

$x + 2 = 0$ o $x + 3 = 0$

$x_1 = -2 \quad -2 \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $x_2 = -3 \quad -3 \in \mathbb{C}$

Conjuntos solución:

- $S_1 = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge x + 2 = 0\} = \{-2\}$
- $S_2 = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge x + 3 = 0\} = \{-3\}$

$S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge x^2 + 5x + 6 = 0\} = S_1 \cup S_2 = \{-2, -3\}$

118

También podemos escribir el conjunto solución

$$S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge x^2 + 5x + 6 = 0\}$$

en la forma

$$S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge \underline{\qquad\qquad}\}$$

sistema equivalente

$(x + 2 = 0 \vee x + 3 = 0)$

119

- Resolver $x^2 + 8x + 15 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$
- Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: $\underline{\qquad\qquad}$
- Sistema equivalente $\underline{\qquad}$ o $\underline{\qquad}$

$x_1 = \underline{\quad}$ $\qquad$ $x_2 = \underline{\quad}$

- Comprobación:
- Conjunto solución: $S = \underline{\qquad\qquad}$

Ver respuesta en el siguiente cuadro.

- Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado

$$x^2 + 8x + 15 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$$

$$(x + 3)(x + 5) = 0$$

- Sistema equivalente

$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 5 = 0$$

$x_1 = -3 \quad -3 \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $x_2 = -5 \quad -5 \in \mathbb{C}$

- Comprobación:

$(-3)^2 + 8(-3) + 15 = 0$	$(-5)^2 + 8(-5) + 15 = 0$
$9 - 24 + 15 = 0$	$25 - 40 + 15 = 0$
$0 = 0$ ▲ PCV	$0 = 0$ ▲ PCV

- Conjuntos solución:

- $S_1 = \{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge x + 3 = 0\} = \{-3\}$
- $S_2 = \{x/x \in \mathbb{C} \wedge x + 5 = 0\} = \{-5\}$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge x^2 + 8x + 15 = 0\} = \{-3, -5\}$$

120

Resolver $\quad x^2 + 4x + 4 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$

Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: $\quad$ [ ]

Sistema equivalente $\quad$ [ ] o [ ]

$x_1 =$ [ ] $\qquad x_2 =$ [ ]

Comprobación: $\quad$ [ ]

Conjunto solución: $\quad S =$ [ ]

Ver respuesta en el siguiente cuadro.

- Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado:

$x^2 + 4x + 4 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$

$(x + 2)(x + 2) = 0$

- Sistema equivalente

$x + 2 = 0$ o $x + 2 = 0$

$x_1 = -2$ $\qquad$ $x_2 = -2$

- Comprobación:

$(-2)^2 + 4(-2) + 4 = 0$

$4 - 8 + 4 = 0$

$0 = 0$ ◀ PCV

- Conjunto solución:

$S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge x^2 + 4x + 4 = 0\} = \{-2\}$

121

- Resolver

$x^2 - 10x + 21 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$

- Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado:

- Sistema equivalente

o

$x_1 =$ $\qquad$ $x_2 =$

- Comprobación:

- Conjunto solución: $S =$

Ver respuesta en el cuadro siguiente.

- Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado:

$x^2 - 10x + 21 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$

$(x - 3)(x - 7) = 0$

- Sistema equivalente

$x - 3 = 0$ o $x - 7 = 0$

$x_1 = 3$ $\qquad$ $x_2 = 7$

- Comprobación:

$(3)^2 - 10(3) + 21 = 0$ $\qquad$ $(7)^2 - 10(7) + 21 = 0$

$9 - 30 + 21 = 0$ $\qquad$ $49 - 70 + 21 = 0$

$0 = 0$ ◀PCV $\qquad$ $0 = 0$ ◀PCV

- Conjunto solución:

$S = \{x/x \in \mathbb{C} \wedge x^2 - 10x + 21 = 0\} = \{3, 7\}$

122

- Resolver $x^2 + x - 2 = 0$ $x \in \mathbb{C}$
- Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: [ ]
- Sistema equivalente [ ] o [ ]

  $x_1 =$ [ ] $x_2 =$ [ ]
- Comprobación: [ ]
- Conjunto solución: $S =$ [ ]

Ver respuesta en el cuadro siguiente.

- Resolver $x^2 + x - 2 = 0$ $x \in \mathbb{C}$
- Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: $(x + 2)(x - 1) = 0$
- Sistema equivalente $x + 2 = 0$ o $x - 1 = 0$

  $x_1 = -2$ $x_2 = 1$
- Comprobación:

  $(-2)^2 + (-2) - 2 = 0$ $(1)^2 + (1) - 2 = 0$

  $4 - 2 - 2 = 0$ $1 + 1 - 2 = 0$

  $0 = 0$ ◀ PCV $0 = 0$ ◀ PCV
- Conjunto solución: $S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge x^2 + x - 2 = 0\} = \{-2, 1\}$

2.5.5.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

123

Resolver $\boxed{4x^2 + 4x + 1 = 0}$ $x \in \mathbb{C}$

Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: $\boxed{}$

$(2x + 1)(2x + 1) = 0$

124

Hemos identificado el primer miembro como un

trinomio cuadrado perfecto

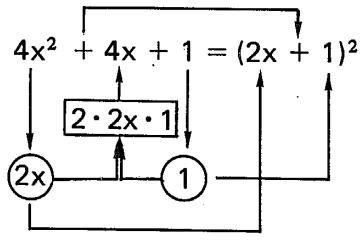
factorizable en $\mathbb{Z}$.

$\boxed{4x^2 + 4x + 1 = 0}$ $x \in \mathbb{C}$

$\boxed{(2x + 1)(2x + 1) = 0}$

125

Recordemos, a través de este esquema, el proceso de factorización de un trinomio cuadrado perfecto.



126

$4x^2 + 4x + 1 = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: $(2x + 1)(2x + 1) = 0$

Sistema equivalente: [ ] o [ ]

$x_1 =$ [ ] $\qquad x_2 =$ [ ]

Comprobación: [ ]

Conjunto solución: $S =$ [ ]

Ver respuesta en el cuadro siguiente.

$4x^2 + 4x + 1 = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

- Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: $(2x + 1)(2x + 1) = 0$
- Sistema equivalente: $2x + 1 = 0$ o $2x + 1 = 0$

$x_1 = -1/2 \qquad x_2 = -1/2 \quad -1/2 \in \mathbb{C}$

- Comprobación:

$$4(-1/2)^2 + 4(-1/2) + 1 = 0$$
$$1 - 2 + 1 = 0$$
$$0 = 0 \blacktriangleleft \text{PCV}$$

- Conjunto solución: $S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge 4x^2 + 4x + 1 = 0\} = \{-1/2\}$

127

Resolver $16x^2 - 8x + 1 = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

Expresión equivalente con el primer miembro factorizado: [ ]

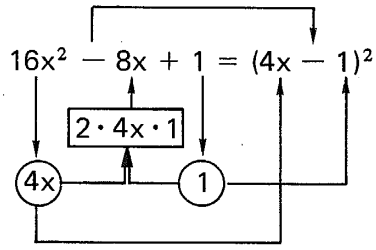
$(4x - 1)(4x - 1)$

128

$$16x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$(4x - 1)(4x - 1) = 0$$

El primer miembro es un **trinomio cuadrado perfecto** factorizable en $\mathbb{Z}$



129

Continuar resolviendo

Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado:

$16x^2 - 8x + 1 = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

$(4x - 1)(4x - 1) = 0$

Sistema equivalente

$\square$ o $\square$

$x_1 = \square$ $\qquad$ $x_2 = \square$

Comprobación:

Conjunto solución:

$S = \{\ \}$

Ver respuesta en el cuadro siguiente.

- Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado:

$16x^2 - 8x + 1 = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

$(4x - 1)(4x - 1) = 0$

- Sistema equivalente

$4x - 1 = 0$ o $4x - 1 = 0$

$x_1 = 1/4$ $\qquad$ $x_2 = 1/4$

- Comprobación:

$16(1/4)^2 - 8(1/4) + 1 = 0$

$1 - 2 + 1 = 0$

$0 = 0$ ◀ PCV

- Conjunto solución:

$S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge 16x^2 - 8x + 1 = 0\} = \{1/4\}$

2.5.5.2

Práctica adicional
si
se considera necesario.

130

Resolver $\boxed{6x^2 + 13x + 6 = 0}$

Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: $\boxed{}$

$(2x + 3)(3x + 2) = 0$

Véase el cuadro siguiente.

131

Recordemos un procedimiento para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, que implica los siguientes pasos:

1. Multiplicar el trinomio por a (en nuestro caso, por 6):

   $6^2x^2 + 13 \cdot 6x + 36$

2. Escribir el trinomio en la siguiente forma:

   $(6x)^2 + 13(6x) + 36$

3. Intentar factorizar como trinomio de la forma $x^2 + ax + b$

   $(6x + 9)(6x + 4)$

4. Dividir la expresión resultante entre 6:

$$\frac{(6x + 9)(6x + 4)}{6} = \frac{6x + 9}{3} \cdot \frac{6x + 4}{2} = (2x + 3)(3x + 2)$$

132

Completar la solución de $6x^2 + 13x + 6 = 0$

$(2x + 3)(3x + 2) = 0$

Sistema equivalente [ ] o [ ]

[ ] [ ]

Comprobación: [ ]

Conjunto solución: $S =$ [ ]

Ver respuesta en el cuadro siguiente

Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: $(2x + 3)(3x + 2) = 0$

Sistema equivalente $2x + 3 = 0$ o $3x + 2 = 0$

$x_1 = -3/2$ $-3/2 \in \mathbb{C}$ $x_2 = -2/3$ $-2/3 \in \mathbb{C}$

Comprobación:

$6(-3/2)^2 + 13(-3/2) + 6 = 0$

$\frac{27}{2} - \frac{39}{2} + \frac{12}{2} = 0$

$0 = 0$ ◀ PCV

$6(-2/3)^2 + 13(-2/3) + 6 = 0$

$\frac{8}{3} - \frac{26}{3} + \frac{18}{3} = 0$

$0 = 0$ ◀ PCV

Conjunto solución: $S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge 6x^2 + 13x + 6 = 0\} = \{-3/2, -2/3\}$

133

Resolver $2x^2 + x - 15 = 0$ $x \in \mathbb{C}$

Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

Factorización del primer miembro:

1. $2^2x^2 + 2x - 30$
2. $(2x)^2 + (2x) - 30$
3. $(2x + 6)(2x - 5)$
4. $\frac{2x + 6}{2}(2x - 5)$

$2x^2 + x - 15 = 0$

$(x + 3)(2x - 5) = 0$

- $(x + 3)(2x - 5)$

134

Completar la solución

$2x^2 + x - 15 = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$

$(x + 3)(2x - 5) = 0$

Sistema equivalente: $\square$ o $\square$

$x_1 = \square$ $\qquad$ $x_2 = \square$

Comprobación:

Conjunto solución: $S = \square$

Ver respuesta en el cuadro siguiente

$2x^2 + x - 15 = 0$

- Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: $(x + 3)(2x - 5) = 0$
- Sistema equivalente: $x + 3 = 0$ o $2x - 5 = 0$

$x_1 = -3$ $\quad -3 \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $x_2 = -5/2$ $\quad -5/2 \in \mathbb{C}$

- Comprobación:

$2(-3)^2 + (-3) - 15 = 0$ $\qquad$ $2(5/2)^2 + (5/2) - 15 = 0$

$18 - 3 - 15 = 0$ $\qquad$ $\frac{25}{2} + \frac{5}{2} - \frac{30}{2} = 0$

$0 = 0 \blacktriangleleft PCV$ $\qquad$ $0 = 0 \blacktriangleleft PCV$

- Conjunto solución: $S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge 2x^2 + x - 15 = 0\} = \{-3, 5/2\}$

2.5.5.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.5.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* ecuaciones completas de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, mediante la factorización en $\mathbb{Z}$ del primer miembro.

5.6

Ecuaciones completas de segundo grado: factorización en $\mathbb{C}$

135

Se requiere resolver $3x^2 + 5x - 1 = 0$

Ecuación equivalente con el primer miembro factorizado: ⌊ ⌋

El trinomio

$3x^2 + 5x - 1$

no

es factorizable en $\mathbb{Z}$.

136

Desarrollaremos un procedimiento para

factorizar cualquier trinomio de la forma:

$$ax^2 + bx + c$$

137

Sea $3x^2 + 5x - 1$

un trinomio de la forma
$ax^2 + bx + c$,
que necesitamos

factorizar.

138

Estado inicial: $\boxed{3x^2 + 5x - 1}$

Transformaciones:

1. Expresemos el trinomio como un producto de dos factores, uno de los cuales es 3 (coeficiente de x^2): $\boxed{\quad}$

$3\left(x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}\right)$

139

$3\left(x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}\right)$

2. Sumemos y restemos a la expresión que está entre paréntesis un cierto número t^2 de modo que los primeros tres términos (de la expresión que está entre paréntesis) constituyan un **trinomio cuadrado perfecto:** $3\left(x^2 + \frac{5}{3}x + \overbrace{\boxed{t^2} - \boxed{t^2}}^{0} - \frac{1}{3}\right)$

   trinomio cuadrado perfecto

   En este caso:

   $t^2 = \boxed{\quad}$

- $\frac{25}{36}$

(Véase cuadro siguiente)

140

Puesto que el segundo término del trinomio cuadrado perfecto $\frac{5}{3}x$ debe ser igual al doble producto de las raíces cuadradas del primer y del tercer término, escribimos:

$$\frac{5}{3}x = 2 \cdot x \cdot t$$

de donde

$$t = \frac{5x}{6x} = \frac{5}{6}$$

y

$$t^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

141

Así, hemos obtenido: $3\left(\underbrace{x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}} - \frac{25}{36} - \frac{1}{3}\right)$

3. Procedamos entonces a factorizar el trinomio cuadrado perfecto resultante:

$$3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{1}{3}\right]$$

142

$$3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{1}{3}\right]$$

4. Efectuemos la suma de los últimos dos términos de la expresión que está entre corchetes:

$$3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{37}{36}\right]$$

143

$$3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{37}{36}\right]$$

5. Ahora, factoricemos la expresión que está entre corchetes, considerándola como una **diferencia de cuadrados,** recordando que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$$3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)+\frac{\sqrt{37}}{6}\right]\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)-\frac{\sqrt{37}}{6}\right]$$

144

$$3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)+\frac{\sqrt{37}}{6}\right]\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)-\frac{\sqrt{37}}{6}\right]$$

6. Reagrupemos los términos como lo sugieren los vínculos:

$$3\left(x+\frac{5+\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{37}}{6}\right)$$

145

Estado inicial: $3x^2 + 5x - 1 = 0$

Estado final: $3\left(x+\frac{5+\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{37}}{6}\right)$

146

Consideremos de nuevo nuestra ecuación:

$$3x^2 + 5x - 1 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$$

$$3\left(x + \frac{5+\sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{5-\sqrt{37}}{6}\right) = 0$$

Al multiplicar ambos miembros de esta nueva ecuación por 1/3 obtenemos:

$$\left(x + \frac{5+\sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{5-\sqrt{37}}{6}\right)$$

147

Completar la solución:

$$3x^2 + 5x - 1 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$$

$$\left(x + \frac{5+\sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{5-\sqrt{37}}{6}\right) = 0$$

$$\square \quad \text{o} \quad \square$$

$$x_1 = \square \qquad x_2 = \square$$

Respuesta en el cuadro siguiente

148

$$3x^2 + 5x - 1 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$$

$$\left(x + \frac{5+\sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{5-\sqrt{37}}{6}\right) = 0$$

$$x + \frac{5+\sqrt{37}}{6} = 0 \quad \text{o} \quad x + \frac{5-\sqrt{37}}{6} = 0$$

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{37}}{6} \in \mathbb{C} \qquad x_2 = \frac{-5+\sqrt{37}}{6} \in \mathbb{C}$$

Comprobación:

Respuesta en el cuadro siguiente

$$3x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$x_2 = \frac{-5+\sqrt{37}}{6}$$

$$3\left(\frac{-5+\sqrt{37}}{6}\right)^2 + 5\left(\frac{-5+\sqrt{37}}{6}\right) - 1 = 0$$

$$3\left(\frac{25-10\sqrt{37}+37}{36}\right) + \frac{-25+5\sqrt{37}}{6} - 1 = 0$$

$$\frac{25-10\sqrt{37}+37}{12} + \frac{-25+5\sqrt{37}}{6} - 1 = 0$$

$$\frac{25-10\sqrt{37}+37-50+10\sqrt{37}-12}{12} = 0$$

$$25 - 10\cancel{\sqrt{37}} + 37 - 50 + 10\cancel{\sqrt{37}} - 12 = 0$$

$$62 - 62 = 0$$

$$0 = 0$$

▲
PCV

De manera análoga, podemos efectuar la comprobación para x_1.

149

Estudiar con atención:

$$3x^2 + 5x - 1 = 0 \qquad x \in \mathbb{C}$$

$$\left(x + \frac{5+\sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{5-\sqrt{37}}{6}\right) = 0$$

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{37}}{6} \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{37}}{6}$$

$$S = \left\{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge 3x^2 + 5x - 1 = 0\right\} = \left\{\frac{-5+\sqrt{37}}{6}, \frac{-5-\sqrt{37}}{6}\right\}$$

150

Otro ejemplo.

Se requiere resolver
la ecuación

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \qquad x \in \mathbb{C}$$

para lo cual es
necesario factorizar
el trinomio

$$x^2 - 6x + 13$$

151

Estado inicial: $\boxed{x^2 - 6x + 13}$

Transformaciones:

1. La primera transformación (expresar como un producto de dos factores, uno de los cuales es el coeficiente de x^2) deja la **expresión inalterada,** puesto que, en este caso, el coeficiente de x^2 es 1

$x^2 - 6x + 13$

152

$$x^2 - 6x + 13$$

2. Sumemos y restemos un cierto número t^2, de modo que los primeros tres términos constituyan un **trinomio cuadrado perfecto:** $\underbrace{x^2 - 6x + t^2}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}} \overbrace{- t^2}^{0} + 13$

En este caso:

$t^2 = \boxed{}$

9

(Véase cuadro siguiente)

153

Puesto que el segundo término del trinomio cuadrado perfecto (6x) debe ser igual al doble producto de las raíces cuadradas del primer y tercer término escribimos:

$$6x = 2 \cdot x \cdot t$$

de donde

$$t = \frac{6x}{2x} = 3$$

y

$$t^2 = 3^2 = 9$$

154

Así, hemos obtenido:

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} - 9 + 13$$

3. Procedamos entonces a factorizar el trinomio cuadrado perfecto resultante:

$$\boxed{\quad}$$

$(x - 3)^2 - 9 + 13$

155

4. Efectuemos la suma de los dos últimos términos:

$$(x - 3)^2 - 9 + 13$$

$$\boxed{\quad}$$

$(x - 3)^2 + 4$

156

5. Factoricemos la expresión, considerándola como una **diferencia de cuadrados,** recordando que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$$\boxed{(x - 3)^2 + 4} \rightarrow \underline{\qquad\qquad}$$

$[(x - 3) + 2i][(x - 3) - 2i]$

Véase cuadro siguiente

157

La expresión

$$(x - 3)^2 + 4$$

puede ser escrita en la forma:

$$(x - 3)^2 - 4i^2$$

puesto que $i^2 = -1$
y factorizada así:

$$[(x - 3) + 2i][(x - 3) - 2i]$$

158

6. Reagrupemos los términos en la forma sugerida por los vínculos:

$$\underbrace{[(x - 3) + 2i]}[\underbrace{(x - 3) - 2i}] \rightarrow \underline{\qquad\qquad}$$

$(x - 3 + 2i)(x - 3 - 2i)$

159

Estado inicial
(trinomio dado):

$x^2 - 6x + 13$

Estado final
(trinomio factorizado):

$(x - 3 + 2i)(x - 3 - 2i)$

160

Completar la solución de
la ecuación:

$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$

$(x - 3 + 2i)(x - 3 - 2i) = 0$

$\square$ o $\square$

$x_1 = \square \qquad x_2 = \square$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

161

$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$

$(x - 3 + 2i)(x - 3 - 2i) = 0$

$x - 3 + 2i = 0$ o $x - 3 - 2i = 0$

$x_1 = 3 - 2i \quad x \in \mathbb{C} \qquad x_2 = 3 + 2i \quad x \in \mathbb{C}$

Comprobación:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Comprobación:

$x^2 - 6x + 13 = 0$

$x_1 = 3 - 2i$

$(3 - 2i)^2 - 6(3 - 2i) + 13 = 0$

$9 - 12i + 4i^2 - 18 + 12i + 13 = 0$

$4 + 4i^2 = 0$

Podemos comprobar, en forma análoga para x_2 $(i^2 = -1)$

$4 - 4 = 0$

$0 = 0$

▲ PCV

162

$x^2 - 6x + 13 = 0$ $x \in \mathbb{C}$

$(x - 3 + 2i)(x - 3 - 2i) = 0$

$x - 3 + 2i = 0$ o $x - 3 - 2i = 0$

$x_1 = 3 - 2i \} \in \mathbb{C}$ $x_2 = 3 + 2i \} \in \mathbb{C}$

Conjunto solución:

$S =$ _____

Respuesta en el cuadro siguiente

Estudiar con atención:

$x^2 - 6x + 13 = 0$ $x \in \mathbb{C}$

$(x - 3 + 2i)(x - 3 - 2i) = 0$

$x - 3 + 2i = 0$ o $x - 3 - 2i = 0$

$x_1 = 3 - 2i \} \in \mathbb{C}$ $x_2 = 3 + 2i \} \in \mathbb{C}$

$S = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge x^2 - 6x + 13 = 0\} = \{(3 - 2i), (3 + 2i)\}$

2.5.6.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

163

El **procedimiento** que hemos aplicado para resolver ecuaciones completas de segundo grado es **demasiado laborioso** para ser usado en la práctica.
No obstante, lo utilizaremos para deducir una **fórmula general** que nos permita resolver **cualquier ecuación de segundo grado,** completa o incompleta.

164

Se requiere resolver la ecuación

$$\underset{a \neq 0}{ax^2 + bx + c = 0}$$

para lo cual necesitamos

factorizar el trinomio

$$ax^2 + bx + c$$

165

Estado inicial $\boxed{ax^2 + bx + c}$

Transformaciones:

1. Expresemos el trinomio como un producto de dos factores, uno de los cuales es el coeficiente de x^2: $\square$

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

166

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

2. Sumemos y restemos a la expresión que está entre paréntesis, un cierto número t^2, de modo que los primeros tres términos de dicha expresión constituyan un **trinomio** cuadrado perfecto:

$$a\Big(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \boxed{t^2}}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}} \overbrace{- \boxed{t^2}}^{0} + \frac{c}{a}\Big)$$

En este caso:

$t^2 = \square$

• $\frac{b^2}{4a^2}$

Véase cuadro siguiente

167

Puesto que el segundo término del trinomio cuadrado perfecto

$$\frac{b}{a}x$$

debe ser igual al doble producto de las raíces cuadradas del primer y tercer término:

$$\frac{b}{a}x = 2 \cdot x \cdot t$$

$$t = \frac{bx}{2ax} = \frac{b}{2a}$$

$$\boxed{t^2 = \frac{b^2}{4a^2}}$$

168

Así hemos obtenido: $a\left(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$

3. Factoricemos el trinomio cuadrado perfecto resultante: $\underline{\qquad\qquad\qquad}$

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$

169

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

4. Efectuemos la suma de los últimos dos términos de la expresión que está entre corchetes: $\underline{\qquad\qquad\qquad}$

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

170

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

5. Factoricemos la expresión que está entre corchetes, considerándola como una **diferencia de cuadrados** y recordando que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$: $\underline{\qquad\qquad\qquad}$

Respuesta en el cuadro siguiente

171

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right]$$

6. Reagrupemos los términos en la forma sugerida: _____

Respuesta en el cuadro siguiente

Estado inicial, trinomio dado: ax^2+bx+c

Estado final, trinomio factorizado: $a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

172

Completar la solución de la ecuación:

$ax^2+bx+c=0$

$\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$

_____ o _____

_____ _____

Respuesta en el cuadro siguiente

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

$$x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad \text{o} \quad x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

173

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las dos soluciones obtenidas pueden combinarse así:

A esta expresión se le suele llamar

"fórmula cuadrática".

2.5.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *factorizar* en $\mathbb{C}$ trinomios cuadráticos de la forma: $ax^2 + bx + c$, completando trinomios cuadrados perfectos;
- *resolver* ecuaciones completas de segundo grado de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, por factorización en $\mathbb{C}$; comprobar los resultados, y escribir el conjunto solución por comprensión o por extensión;
- *deducir* una expresión para la solución de ecuaciones de segundo grado, resolviendo por factorización la ecuación en su forma general: $ax^2 + bx + c = 0$.

5.7

Aplicación de la fórmula cuadrática

174

Cualquier ecuación de segundo grado de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

puede ser resuelta mediante la aplicación de la expresión

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

175

El procedimiento consiste simplemente en

sustituir los coeficientes

a, b, c en la expresión general para x y

efectuar las operaciones indicadas.

En los cuadros siguientes tenemos algunos ejercicios.

176

Para resolver la ecuación

$$x^2 + 11x + 24 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$$

primero necesitamos saber que:

a = ____

b = ____

c = ____

1

11

24

177

$$x^2 + 11x + 24 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$$

Una vez obtenidos los valores de a, b y c, los sustituimos en la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1}$$

178

$$x^2 + 11x + 24 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$$

Luego efectuamos las operaciones indicadas:

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1}$$

x = ____

x = ____

Expresión simplificada lo más posible

- $x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2}$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{25}}{2}$$

- $x = \frac{-11 \pm 5}{2}$

179

$$x^2 + 11x + 24 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$$

De este modo, obtenemos dos valores para x:

$$x = \frac{-11 \pm 5}{2}$$

Tomando el signo + :

$x_1 =$ ____

Tomando el signo − :

$x_2 =$ ____

- $x_1 = \dfrac{-11+5}{2}$

$= -3$

- $x_2 = \dfrac{-11-5}{2}$

$= -8$

180

$$x^2 + 11x + 24 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$$

$x_1 = -3 \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $x_2 = -8 \in \mathbb{C}$

Comprobación:

- $(-3)^2 + 11(-3) + 24 = 0$

$9 - 33 + 24 = 0$

$-33 + 33 = 0$

$0 = 0$

▲ PCV

- $(-8)^2 + 11(-8) + 24 = 0$

$64 - 88 + 24 = 0$

$-88 + 88 = 0$

$0 = 0$

▲ PCV

181

$$x^2 + 11x + 24 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$$

$x_1 = -3$ $\qquad$ $x_2 = -8$

Conjunto solución:

$S =$ ____ (por comprensión) $=$ ____ (por extensión)

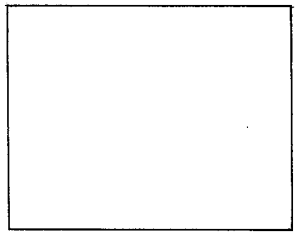
$S = \{x \mid x \in \mathbb{C} \wedge x^2 + 11x + 24 = 0\}$

$= \{-3, -8\}$

182

Resolvamos esta ecuación y las siguientes, aplicando el procedimiento estudiado.

$25x^2 - 15x + 2 = 0 \qquad x \in \mathbb{C}$



$x_1 = \square$

$x_2 = \square$

Respuesta en el cuadro siguiente

- $a = 25 \quad b = -15 \quad c = 2$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 2}}{2 \cdot 25}$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{50}$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{25}}{50}$$

$$x = \frac{15 \pm 5}{50}$$

$$x_1 = \frac{15 + 5}{50} = \frac{20}{50}$$

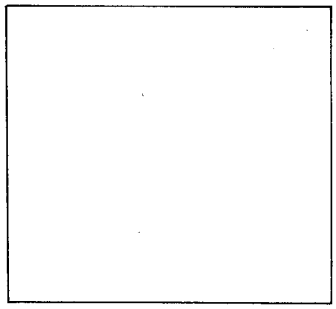
- $x_1 = 2/5 \} \in \mathbb{C}$

$$x_2 = \frac{15 - 5}{50} = \frac{10}{50}$$

- $x_2 = 1/5 \} \in \mathbb{C}$

183

$4x^2 - 12x + 9 = 0 \qquad x \in \mathbb{C}$



$x_1 = \square$

$x_2 = \square$

- $a = 4 \quad b = -12 \quad c = 9$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4}$$

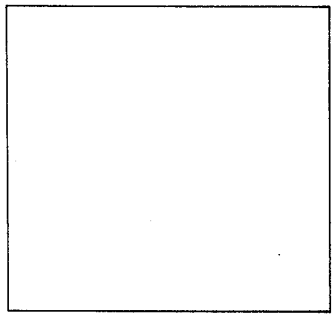
$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8}$$

$$x = \frac{12 \pm 0}{8}$$

- $x_1 = x_2 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \qquad 3/2 \in \mathbb{C}$

184

$2x^2 + 3x + 4 = 0 \qquad x \in \mathbb{C}$



$x_1 =$ ____

$x_2 =$ ____

$a = 2 \quad b = 3 \quad c = 4$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4}$$

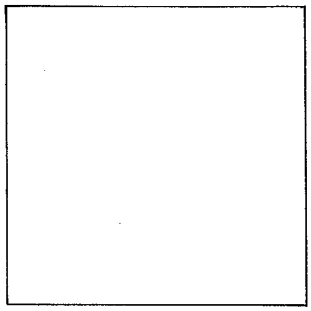
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-23}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{23}\,i}{4} \Big\} \in \mathbb{C}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{23}\,i}{4} \Big\} \in \mathbb{C}$$

185

$x^2 - 5x = 0 \qquad x \in \mathbb{C}$



$x_1 =$ ____

$x_2 =$ ____

$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 0}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25}}{2}$$

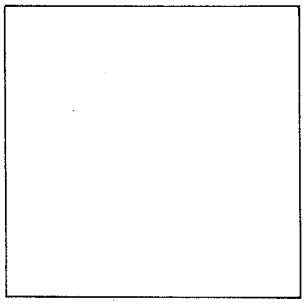
$$x = \frac{5 \pm 5}{2}$$

$x_1 = 5\} \quad 5 \in \mathbb{C}$

$x_2 = 0\} \quad 0 \in \mathbb{C}$

186

$x^2 - 12 = 0 \qquad x \in \mathbb{C}$



$x_1 =$ ____

$x_2 =$ ____

Respuesta
en el
cuadro siguiente

● $a = 1 \quad b = 0 \quad c = -12$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{48}}{2}$$

$$x = \pm \frac{2\sqrt{12}}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{12}$$

● $x_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

● $x_2 = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}, -2\sqrt{3} \in \mathbb{C}$

187

Atención.

Para resolver la ecuación

$$\frac{3x^2}{5} - \frac{x}{4} + 1 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$$

es conveniente multiplicar cada miembro por el mcm de los denominadores:

5 mcm 4 = ⌊___⌋

Así, obtenemos una ecuación equivalente con coeficientes enteros, a saber:

⌊_____⌋

20

$$20\left(\frac{3x^2}{5} - \frac{x}{4} + 1\right) = 0$$

$$12x^2 - 5x + 20 = 0$$

188

$$\frac{3}{5}x^2 - \frac{x}{4} + 1 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$$

Resolver la ecuación equivalente con coeficientes enteros:

$$12x^2 - 5x + 20 = 0$$

$x_1 =$ ⌊_____⌋

$x_2 =$ ⌊_____⌋

● $a = 12 \quad b = -5 \quad c = 20$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 20}}{2 \cdot 12}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 960}}{24}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{-935}}{24}$$

● $x_1 = \frac{5 + \sqrt{935}\,i}{24}$

● $x_2 = \frac{5 - \sqrt{935}\,i}{24}$

$\in \mathbb{C}$

2.5.7.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.5.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* ecuaciones de segundo grado, aplicando la fórmula cuadrática

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

- *comprobar* los resultados, y escribir el conjunto solución por comprensión o por extensión.

5.8

El discriminante $b^2 - 4ac$

189

Al analizar las ecuaciones de segundo grado que hemos resuelto, nos damos cuenta de que los dos satisfactores (o raíces de la ecuación) pueden ser: números **reales diferentes,** números **reales iguales,** o números **complejos no reales.**

190

Si observamos la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

nos daremos cuenta de que el radicando

$$\boxed{b^2 - 4ac}$$

determina la naturaleza de los satisfactores o raíces de la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

191

$ax^2 + bx + c = 0$ → $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

En efecto:

- **si** $b^2 - 4ac > 0$ entonces { **las dos raíces son reales y diferentes**
- **si** $b^2 - 4ac = 0$ entonces { **las dos raíces son reales e iguales**
- **si** $b^2 - 4ac < 0$ entonces { **las dos raíces son complejas no reales**

192

Por ejemplo, las dos raíces de la ecuación

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

son [ ]

puesto que

$b^2 - 4ac =$ [ ]

y es { mayor que / igual a / menor que } 0

reales y diferentes

1

mayor que 0

193

Las dos raíces de la ecuación

$$2x^2 + 3x + 4 = 0$$

son [ ]

puesto que

$b^2 - 4ac =$ [ ]

y es { mayor que / igual a / menor que } 0

complejas no reales

-23

menor que 0

194

Las dos raíces de la ecuación

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

son [ ]

puesto que [ ]

reales e iguales

$0 = 0$

2.5.8.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

195

Ahora, consideremos nuevamente el problema que nos planteamos al principio de este módulo.

196

Se trata de factorizar el trinomio cuadrático

$$x^2 + 6x + 13$$

sabiendo que

$$x^2 + 6x + 13 = (x + n)(x + m)$$

Con ese propósito planteamos el sistema

$$\begin{aligned} n + m &= 6 \\ nm &= 13 \end{aligned}$$

que nos condujo a la ecuación de segundo grado:

$$n^2 - 6n + 13 = 0$$

197

Empecemos por determinar
la naturaleza de las
raíces de la ecuación

$$n^2 - 6n + 13 = 0$$

Las dos raíces son [ ]

puesto que [ ]

complejas no reales

$b^2 - 4ac = -16 < 0$

198

$$n^2 - 6n + 13 = 0$$

Resolvamos esta ecuación utilizando
la fórmula "cuadrática".

$n_1 =$ [ ]

$n_2 =$ [ ]

- $n = \dfrac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2}$

  $n = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2}$

  $n = \dfrac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}$

  $n = \dfrac{6 \pm 4i}{2}$

- $n_1 = \dfrac{6 + 4i}{2}$

  $n_1 = 3 + 2i$

- $n_2 = \dfrac{6 - 4i}{2}$

  $n_2 = 3 - 2i$

199

Observamos que

en el sistema $\begin{cases} n + m = 6 \\ nm = 13 \end{cases}$

si $n = 3 + 2i$:

$m = 6 - (3 + 2i)$

$m = 6 - 3 - 2i$

$m = \mathbf{3 - 2i}$

200

Entonces:

$$\mathbf{x^2 + 6x + 13 = (x + 3 + 2i)(x + 3 - 2i)}$$

Comprobación:

$x + 3 + 2i$

$x + 3 - 2i$

$x^2 + 3x + 2ix$

$3x + 9 + 6i$

$- 2ix - 6i - 4i^2$

$x^2 + 6x + 9 - 4i^2$

$x^2 + 6x + 9 + 4$

$\mathbf{x^2 + 6x + 13}$

2.5.8.2

Práctica adicional,
de factorización en $\mathbb{C}$
de trinomios de la forma:

$ax^2 + bx + c$

si se considera necesario.

2.5.8

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* la naturaleza de las raíces de una ecuación de segundo grado de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, utilizando el siguiente criterio:

  $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ las dos raíces son reales y diferentes,
  $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ las dos raíces son reales e iguales,
  $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ las dos raíces son complejas no reales.

5.9

La ecuación con radicales como modelo matemático

201

¿A qué altura sobre el piso deberá quedar el extremo superior de una escalera apoyada sobre un muro vertical con el pie a 3 metros de éste, si al ser aumentada dicha altura en 2 metros la escalera queda verticalmente adosada al muro?
¿Qué longitud deberá tener la escalera?

202

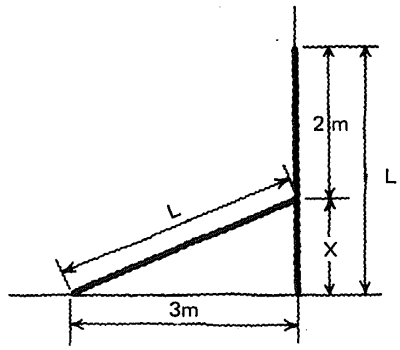
Dispuestos a

resolver matemáticamente

el problema, empezaremos por hacer un **croquis** que nos permita "ver" con mayor claridad las relaciones entre los datos y las incógnitas.

203

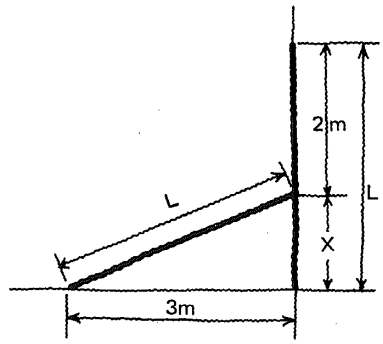
Utilicemos este croquis auxiliar:



204

Por una parte, vemos que:

$x + 2 =$ ⌊___⌋



L

205

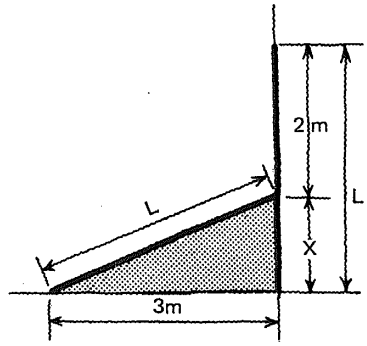
$x + 2 = L$

Por otra parte, una expresión matemática nos permite relacionar geométricamente los 3 lados del triángulo sombreado, así:

$L^2 = x^2 + 3^2$

de donde:

$L = \sqrt{x^2 + 9}$



206

si $x + 2 = 1$

y $1 = \sqrt{x^2 + 9}$

entonces, por transitividad:

$$\boxed{\qquad\qquad}$$

$$x + 2 = \sqrt{x^2 + 9}$$

207

$$x + 2 = \sqrt{x^2 + 9}$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0$$

Este es un

modelo matemático

para nuestro problema
en la forma de una

ecuación con radicales.

208

$$x + 2 = \sqrt{x^2 + 9}$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0$$

La solución de esta ecuación nos
permitirá conocer

la altura del extremo superior (x)
y
la longitud (L)
de la **escalera**

209

Práctica de formación de

ecuaciones con radicales.

210

Dar la ecuación con radicales de los siguientes enunciados.

La raíz cúbica de un número real es igual a 3:

$\sqrt[3]{x} = 3 \quad x \in \mathbb{R}$

211

La raíz quinta de un número real aumentado en 5 es igual a 2:

$\sqrt[5]{x + 5} = 2$
$x \in \mathbb{R}$

212

La raíz cuadrada de la suma de un número con la mitad de sí mismo es igual a 20:

$$\sqrt{x + \frac{x}{2}} = 20$$

213

La raíz cuadrada de un número aumentado en 5 es igual a 14:

$$\sqrt{x + 5} = 14$$

214

Atención.

La raíz cuadrada de un número aumentada en 5 es igual a 14:

$$\sqrt{x} + 5 = 14$$

215

El doble de la raíz cuadrada de un número aumentado en 10, es igual a 37 menos la cuarta parte del número:

$$2\sqrt{x} + 10 = 37 - \frac{x}{4}$$

216

Atención.

El doble de:

la raíz cuadrada de un número aumentado en 10, es igual a 37 menos la cuarta parte del número:

$$2\sqrt{x + 10} = 37 - \frac{x}{4}$$

217

La raíz cuadrada del cuadrado de un número aumentado en 8 es igual a 20 disminuido en la raíz cúbica del número disminuido en 5:

$$\sqrt{x^2 + 8} = 20 - \sqrt[3]{x - 5}$$

218

Se requiere determinar un número real tal que su raíz cuadrada sea igual al número disminuido en 8:

$$\sqrt{x} = x - 8 \qquad x \in \mathbb{R}$$

219

Si tomamos la raíz cuadrada del cuádruplo de cierto número aumentado en uno, obtendremos el número disminuido en cinco:

$$\sqrt{4x + 1} = x - 5$$

2.5.9.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.5.9

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* una "ecuación con radicales" como el modelo matemático de una situación real;
- *formar,* a partir de un enunciado dado, una "ecuación con racionales".

5.10

Conjunto solución de ecuaciones con radicales

220

Se requiere resolver la ecuación

$$\sqrt{x} = 3 \qquad x \in \mathbb{R}$$

Si elevamos al cuadrado los dos miembros, obtendremos:

$$(\sqrt{x})^2 = 3^2$$

$$\downarrow$$

$$x = 9$$

221

$$\sqrt{x} = 3 \qquad x \in \mathbb{R}$$

9 es solución de la ecuación porque $9 \in \mathbb{R}$ y

$$\sqrt{9} = 3$$

$$3 = 3$$

(proposición cerrada verdadera)

222

$\sqrt{x} = 3 \quad x \in \mathbb{R}$

Conjunto solución:

$S = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad}$

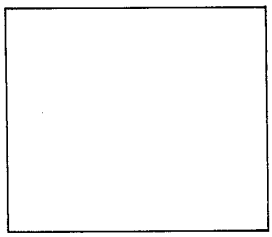
Por comprensión Por extensión

$\{x | x \in \mathbb{R} \wedge \sqrt{x} = 3\} = \{9\}$

223

Resolver esta ecuación:

$\sqrt{x + 1} = 5 \quad x \in \mathbb{R}$



$x = \underline{\qquad}$

$(\sqrt{x + 1})^2 = 5^2$

$x + 1 = 25$

$x = 25 - 1$

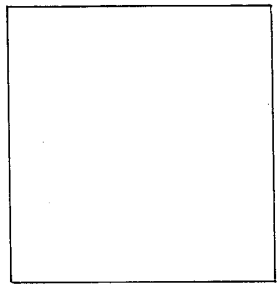
$x = 24$

224

24 es solución de la ecuación

$\sqrt{x} + 1 = 5 \quad x \in \mathbb{R}$

porque:



$24 \in \mathbb{R}$

y

$\sqrt{(24) + 1} = 5$

$\sqrt{25} = 5$

$5 = 5$

PCV

225

Resolver: $\sqrt{3x-2}=\sqrt{x+1}$ $x\in\mathbb{R}$

Transformaciones:

$x=$

Comprobación:

Conjunto solución:

- $(\sqrt{3x-2})^2=(\sqrt{x+1})^2$
- $3x-2=x+1$
- $3x-x=1+2$
- $2x=3$
- $x=3/2$

- $\sqrt{3(3/2)-2}=\sqrt{3/2+1}$

$$\sqrt{\frac{9}{2}-2}=\sqrt{\frac{3}{2}+1}$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$$ ◀ PCV

$\{x/x\in\mathbb{R}\wedge\sqrt{3x-2}=\sqrt{x+1}\}=\{3/2\}$

226

Se requiere resolver la ecuación $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}=1$ $x\in\mathbb{R}$

para lo cual "aislamos" primero uno de los dos radicales, digamos $\sqrt{x+2}$, en el primer miembro:

$\sqrt{x+2}=1-\sqrt{x+5}$

227

$\sqrt{x+2}=1-\sqrt{x+5}$

Luego, elevamos al cuadrado los dos miembros y simplificamos la expresión resultante:

$(\sqrt{x+2})^2=(1-\sqrt{x+5})^2$

$x+2=1-2\sqrt{x+5}+(x+5)$

$x+2=6-2\sqrt{x+5}+x$

$2=6-2\sqrt{x+5}$

$-4=-2\sqrt{x+5}$

$4=2\sqrt{x+5}$

228

$$4 = 2\sqrt{x + 5}$$

"Aislamos", ahora,
el otro radical
en el segundo miembro: ⌊_____⌋

$2 = \sqrt{x + 5}$

229

$$2 = \sqrt{x + 5}$$

Elevamos al cuadrado
los dos miembros
de la ecuación resultante: ⌊_____⌋

$4 = x + 5$

230

$$4 = x + 5$$

Finalmente,
"despejamos" x: $x =$ ⌊___⌋

-1

231

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}=1 \qquad x\in\mathbb{R}$$

Hemos encontrado: $x = -1$

Comprobemos el resultado:

Escribamos el conjunto solución:

$\{\quad\} = \{\quad\}$

$\sqrt{-1+2}+\sqrt{-1+5}=1$

$\sqrt{1}+\sqrt{4}=1$

$1+2=1$

$3=1$

▲

PCF

(-1) no es solución de la ecuación

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}=1$

(véase cuadro siguiente)

232

Tal vez nos sorprenda el hecho de que -1 sea solución de la ecuación

$$4 = x + 5$$

y no lo sea de la ecuación

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}=1$$

de la que provino.

233

Señalemos con ✓ las ecuaciones que tengan el mismo conjunto solución de la ecuación ⑤ y con ✗ las que no lo tengan:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}=1 \qquad ①\ \square$$

$$\sqrt{x+2}=1-\sqrt{x+5} \qquad ②\ \square$$

$$x+2=1-2\sqrt{x+5}+(x+5) \qquad ③\ \square$$

$$2=\sqrt{x+5} \qquad ④\ \square$$

$$4=x+5 \qquad ⑤\ \square$$

① ✗

② ✗

③ ✓

④ ✓

234

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}=1$ ① ☒

$\sqrt{x+2}=1-\sqrt{x+5}$ ② ☒

$x+2=1-2\sqrt{x+5}+(x+5)$ ③ ☑

$2=\sqrt{x+5}$ ④ ☑

$4=x+5$ ⑤ $\boxed{S=\{-1\}}$

Vemos que las ecuaciones ③ y ④ tienen el mismo conjunto solución que la ecuación ⑤.

235

La transformación consistente en elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación ② produjo la ecuación ③ que **no es equivalente** a la ② puesto que no tiene su mismo conjunto solución.

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}=1$ ① ☒

$\sqrt{x+2}=1-\sqrt{x+5}$ ② ☒

$x+2=1-2\sqrt{x+5}+(x+5)$ ③ ☑

$2=\sqrt{x+5}$ ④ ☑

$4=x+5$ ⑤ $\boxed{S=\{-1\}}$

236

Hemos de observar que
x = − 1 es solución de las ecuaciones ③, ④ y ⑤,
pero
no es solución de las ecuaciones ① y ② .

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}=1$ ① ☒

$\sqrt{x+2}=1-\sqrt{x+5}$ ② ☒

$x+2=1-2\sqrt{x+5}+(x+5)$ ③ ☑

$2=\sqrt{x+5}$ ④ ☑

$4=x+5$ ⑤ $\boxed{S=\{-1\}}$

237

Consideremos este otro ejemplo:

Sea la ecuación $\sqrt{x+6} = x$ $\quad x \in \mathbb{R}$ ①

Elevemos al cuadrado los dos miembros a fin de suprimir el radical:

$x + 6 = x^2$

238

$\sqrt{x+6} = x$ $\quad x \in \mathbb{R}$ ①

$x + 6 = x^2$ ②

El conjunto solución de la ecuación ② es:

definido por extensión.

$x + 6 = x^2 \qquad x \in \mathbb{R}$

$x^2 - x - 6 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$

$x = \dfrac{1 \pm 5}{2}$

$x_1 = 3$

$x_2 = -2$

Comprobación:

$3 + 6 = 9$

$9 = 9$ ◀ PCV

$-2 + 6 = (-2)^2$

$4 = 4$ ◀ PCV

● $\{3, -2\}$

239

$\sqrt{x+6} = x$ $\quad x \in \mathbb{R}$ ①

$x + 6 = x^2$ ② ⟶ $S = \{3, -2\}$

Veamos si 3 y -2 satisfacen la ecuación ① :

● $x_1 = 3$

$\sqrt{3+6} = 3$

$\sqrt{9} = 3$

$3 = 3$ ◀ PCV

● $x_2 = -2$

$\sqrt{-2+6} = -2$

$\sqrt{4} = -2$

$2 = -2$ ◀ PCF

240

$$\sqrt{x+6} = x \quad (1)$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$x + 6 = x^2 \quad (2) \longrightarrow S_2 = \{3, -2\}$$

El hecho es que:

si se elevan al cuadrado los dos miembros de una ecuación a fin de suprimir los radicales, **no siempre** esta transformación da lugar a una **ecuación equivalente** (es decir, con el mismo conjunto solución).

241

$$\sqrt{x+6} = x \quad (1) \longrightarrow S_1 = \{3\}^*$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$x + 6 = x^2 \quad (2) \longrightarrow S_2 = \{3, -2\}$$

No obstante, el conjunto solución de la ecuación original (1) es **un subconjunto** del conjunto solución de la ecuación transformada (2).

* Puede comprobarse que ningún otro número real satisface la ecuación (1)

242

Reconsideremos el ejemplo anterior:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+5} = 1 \quad (1)\ \boxtimes$$

$$\sqrt{x+2} = 1 - \sqrt{x+5} \quad (2)\ \boxtimes$$

$$x + 2 = 1 - 2\sqrt{x+5} + (x+5) \quad (3)\ \checkmark$$

$$2 = \sqrt{x+5} \quad (4)\ \checkmark$$

$$4 = x + 5 \quad (5)\ \boxed{S = \{-1\}}$$

243

Habíamos encontrado que el conjunto solución de la ecuación ① es diferente del de la ⑤ (— 1 no satisface la ecuación ①). Entonces, de acuerdo con lo enunciado en el cuadro anterior, el

conjunto solución de la ecuación ① debe ser

ϕ

2.5.10.1

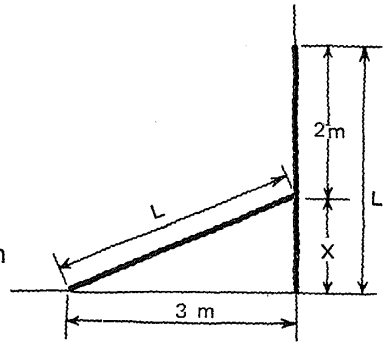
Práctica adicional de resolución de **ecuaciones con radicales,** si se considera necesario.

244

Resolvamos, ahora, la ecuación que nos ha servido de modelo para el **problema de la escalera:**

$$x + 2 = \sqrt{x^2 + 9}$$
$$x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0$$

Resolver y comparar la solución con la respuesta proporcionada en los cuadros siguientes:



Respuesta en el cuadro siguiente

$$\boxed{x + 2 = \sqrt{x^2 + 9}} \qquad x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0 \qquad (1)$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación (1), obtenemos:

$$(x + 2)^2 = x^2 + 9 \qquad (2)$$

Simplificando:

$$4x + 4 = 9 \qquad (3)$$

Determinando el conjunto solución de la ecuación (3):

$$x = 5/4$$
$$S_3 = \{5/4\}$$

Sustituyendo 5/4 en la ecuación (1):

$$\frac{5}{4} + 2 = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 9}$$

Simplificando:

$$\frac{13}{4} = \sqrt{\frac{169}{16}}$$

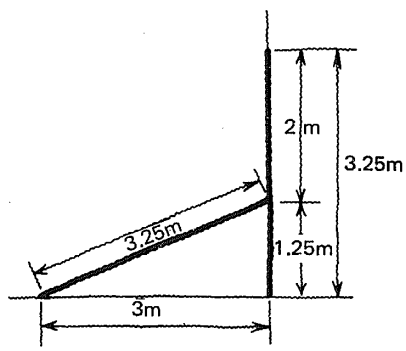
$$\frac{13}{4} = \frac{13}{4} \blacktriangleleft \text{PCV}$$

Escribiendo el conjunto solución de la ecuación (1):

$$\boxed{S_1 = \{5/4\} = \{1.25\}} \qquad 1.25 \in \mathbb{R} \text{ y } 1.25 \geqslant 0$$

245

La solución de nuestro problema:



2.5.10

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* ecuaciones sencillas con radicales; comprobar los resultados, y escribir el conjunto solución por comprensión o por extensión.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de mayo de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100